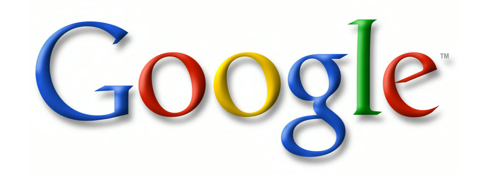




Hosted by Google

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XXV, 2.

DR. GINO LORIA
ORD. PROFESSOR DER HÖHEREN GEOMETRIE AN DER UNIVERSITÄT GENUA

VORLESUNGEN ÜBER
DARSTELLENDE GEOMETRIE

AUTORISIERTE, NACH DEM ITALIENISCHEN MANUSKRIPT BEARBEITETE
DEUTSCHE AUSGABE

VON

PROF. FRITZ SCHÜTTE
OBERLEHRER AM GYMNASIUM ZU DÜREN

ZWEITER TEIL:
ANWENDUNGEN AUF EBENFLÄCHIGE GEBILDE, KURVEN UND FLÄCHEN

MIT 146 FIGUREN IM TEXTE



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

Vorrede zum zweiten Teile.

Zweck und Plan dieses Bandes sind durch seinen Titel klar ausgedrückt: sein Zweck ist, zu zeigen, in welcher Weise die wichtigsten geometrischen Gebilde mit Hilfe der im I. Teil dargelegten Methoden dargestellt, und die hervorragendsten sie betreffenden Probleme gelöst werden können. Die gewählte Anordnung ist die natürlich sich darbietende, wenn man vom Einfacheren zum Zusammengesetzteren fortschreitet.

Trotz dieser Einheit des Zweckes besteht ein großer Unterschied zwischen der Anlage, unter der sich die Darlegungen des ersten der drei Bücher, die diesen Band ausmachen, darbieten, und der der beiden folgenden; daraus ergibt sich für uns die Pflicht, die Gründe dieser Verschiedenheit zu erklären.

Der Stoff des ersten Buches ist die Darstellung von Gebilden, die der Leser größtenteils schon von den Anfängen seiner geometrischen Studien her kennt (körperliche Ecken und Polyeder); daher dürfen wir die Bekanntschaft mit ihren Fundamentaleigenschaften voraussetzen, indem wir uns bloß einige Bemerkungen über die allgemeine Theorie der Polyeder gestatten, die weniger bekannt sein dürfte und noch ihrer weiteren Pflege und ihres Ausbaues harret.

Die Kurven und Flächen hingegen, die den Stoff der beiden folgenden Bücher bilden, sind Gebilde, deren Bekanntschaft wir wohl nicht bei der Allgemeinheit unser Leser voraussetzen dürfen, wenn wir auch zugeben wollen, daß sie bei den Studierenden der Universität im großen ganzen nicht unbekannt seien. Somit erachten wir es für notwendig, ihre Theorie in allgemeinen Linien zu zeichnen, und dabei entsteht die Frage nach dem einzuschlagenden Wege.

Nun ist, was wohl schwerlich zu leugnen ist, die reine Geometrie heute noch nicht soweit vorgeschritten, um die Mittel zu bieten, mit Strenge und Sicherheit in einfacher Weise die allgemeine Theorie der stetigen Reihen von ∞^1 oder ∞^2 Punkte aufzustellen, selbst wenn man sich auf algebraische Gebilde beschränken wollte. Die Kunstgriffe, die bisher angewendet werden, setzen entweder stillschweigend die Existenz der die zu untersuchenden Gebilde darstellenden Gleichungen voraus, oder gründen sich auf Infinitesimalbetrachtungen, deren geringe Strenge durch die Tatsache erwiesen ist, daß sie nicht imstande sind,

zur Bestimmung des Gültigkeitsbereiches für die aufgestellten Sätze zu führen[1]). Oder sie gründen sich auf den Gebrauch kinematischer Betrachtungen, die die Vertreter der reinen Geometrie als fremdartig verwerfen, und deren absolute Strenge von vielen, wohl nicht mit Unrecht, in Zweifel gezogen wird.

Dahingegen besitzt die analytische Geometrie der Kurven und Flächen heutzutage so breite und feste Grundlagen, daß auch die begeisterten Anhänger der reinen Geometrie oft gezwungen sind, ihre Hilfe herbeizurufen. Somit halten auch wir es für angebracht, sie herbeizuziehen, um ein solides Fundament für den Flügel unseres Gebäudes zu erhalten, der dazu bestimmt ist, die Untersuchung und Darstellung der Kurven und Flächen aufzunehmen. Hierzu treibt uns auch ein allgemeines Streben unseres Zeitalters, das die gemischten Methoden den reinen vorzieht, und das in allen Zweigen der Mathematik mehr zu einer Verschmelzung drängt[2]). Insbesondere sehen wir unsere Ansicht gestützt durch die Meinung eines hervorragenden Kenners, wie G. Holzmüller, der sagte: „auf der Universität müsse das Streben dahingehen, darstellende, synthetische und analytische Geometrie zu einer vollkommenen Einheit zu verschmelzen“[3]). Wir wollen zwar nicht bestimmt behaupten, daß das Ergebnis für die darstellende Geometrie schon ein definitives sei; wir selbst möchten wünschen, daß die reine Geometrie alsbald solche Fortschritte machen möge, daß diese Trennung ratsam erscheint. Wir sind aber der Meinung, daß sie darauf Anspruch machen kann, von allen gepflegt zu werden, die beim Unterrichte danach streben, Einfachheit mit wissenschaftlicher Strenge in Einklang zu bringen, und wir möchten hier mit W. K. Clifford wiederholen: a man of science explains as much as ever he can, and then he says: „this is all I can do; for the rest you must ask the next man.“

Auch wollen wir nicht verschweigen, daß uns zu diesem Entschlusse die Bemerkung ermuntert hat (die wir im III. Teile des vorliegenden Werkes, der eine Geschichte der darstellenden Geometrie enthalten wird, völlig bestätigt sehen werden), daß mehrere neuere Fort-

1) Wir spielen insbesondere an auf die vielen sogenannten synthetischen Begründungen, um die Existenz der Tangenten und Schmiegungsebenen bei Kurven und der Tangentialebenen an Flächen darzutun. Ferner sei bemerkt, daß wir noch keine Methode kennen, um ohne Formeln zu beweisen, „daß im allgemeinen durch jeden Punkt des Raumes eine Sehne einer Raumkurve geht“, ein in vielen Fällen unentbehrlicher Satz.

2) Durchgeführt ist schon die Verschmelzung der Planimetrie mit der Stereometrie, der Geometrie der Lage mit der analytischen Geometrie, der Differential- und Integralrechnung. Somit erscheint als sehr natürlich das Streben, die darstellende Geometrie mit der analytischen in organische Verbindung zu bringen, indem wir beide Bezeichnungen in ihrem weitesten Sinne fassen.

3) Bemerkungen über den Unterricht und die Lehramtsprüfung in der angewandten Mathematik. (Jahresber. der Deutschen Math.-Vers. Bd. XIV, 1905, S. 265).

schritte, die unsere Wissenschaft gemacht hat, größtenteils durch Anwendung der Koordinatenmethode erhalten wurden.[1]) Schließlich sei bemerkt: Wenn er in seinem Lehrbuche ständig die analytische Darstellung einer Figur mit der graphischen verkoppelt sieht, wird der Studierende es sich zur Gewohnheit machen, jede geometrische Aufgabe von allen Gesichtspunkten aus zu betrachten, und sich auch für die topologischen Fragen interessieren, die die Gebilde betreffen, deren Gleichung er vor sich hat.

Diese Begründung der von uns getroffenen Wahl der Behandlung glaubten wir frei heraus sagen zu müssen, nicht um andere Methoden der Behandlung als tadelnswert hinzustellen, sondern um „das Geschrei der Gegner“ zu beschwichtigen; und wenn ein Gauß dieses fürchtete, so darf auch sehr wohl jeder, der schreibt, es zu beseitigen trachten!

Das sehr ausführliche Inhaltsverzeichnis, welches dem Texte voraufgeht (und ein alphabetisches Register überflüssig macht), enthebt uns der Mühe, auf alle Einzelheiten der Materie einzugehen; dennoch mögen einige Erläuterungen zu dem II. und III. Buche hier vorgebracht werden.

Das II. Buch beginnt mit einem Kapitel über die ebenen Kurven, dem wir, im Gegensatz zu unseren Vorgängern, aus zwei Gründen eine beträchtlichere Ausdehnung gegeben haben. Erstens sind die für ihre Untersuchung angewendeten Methoden dieselben, wie sie auch bei den Raumkurven uud Flächen angewendet werden, und darum ist es didaktisch von Wert, diese in ihrer einfachsten Form darzulegen. Zweitens führt die Lösung fast aller Aufgaben aus der darstellenden Geometrie der Raumkurven und Flächen in letzter Linie auf die Zeichnung einer oder mehrerer Kurven und die Aufsuchung der ihnen gemeinsamen Elemente; darum ist es sehr wichtig, daß der Leser sich eine innige Vertrautheit mit diesen interessanten Gebilden aneignet. Aus diesem Grunde haben wir auch vielfache Beispiele ebener Kurven angeführt, und wir empfehlen dem jüngeren Leser, die entsprechenden Figuren auch selbst zu zeichnen und die dargestellten Kurven genauer zu untersuchen. (Diese Empfehlung gilt auch sehr wohl für die übrigen Figuren des ganzen Werkes). Wenngleich in dem ganzen Werke nur solche Gebilde behandelt werden, die durch Gleichungen definierbar sind, so sollten doch die graphischen Kurven nicht mit völligem Stillschweigen übergangen werden, da mit ihnen die elegante und lehrreiche Methode der Fehlerkurven verknüpft ist (vgl. § 5).

Das zweite Kapitel des II. Buches ist den Raumkurven gewidmet,

---

1) Es sei hier schon bemerkt, daß die gleichzeitige Betrachtung der beiden Methoden, mit den Ansichten Monges, des Begründers der darstellenden Geometrie in Einklang steht, indem nämlich die Hauptwerke dieses großen Mathematikers die Géometrie descriptive und die Applications de l'analyse à la géometrie sind.

die hier nicht als Schnitte von Flächen, sondern als einfache Folgen von Punkten betrachtet werden. Die allgemeine Theorie wird (im dritten Kapitel) an zwei Beispielen illustriert; das eine ist eine algebraische, das andere eine transzendente Kurve. Die letztere ist die sehr bekannte Zylinder-Schraubenlinie, die andere die Spirale des Pappus, eine in verschiedener Hinsicht bemerkenswerte Kurve, nicht zuletzt durch die merkwürdige Tatsache, daß sie, trotzdem sie das Analogon auf der Kugel zu der transzendenten Spirale des Archimedes ist, dennoch eine algebraische Kurve darstellt.

Das III. Buch ist den allgemeinen und speziellen Flächen gewidmet. Das erste Kapitel enthält die allgemeine Theorie, die wie bei den Kurven, innerhalb derjenigen Grenzen gehalten ist, die durch die Rücksicht auf für das die darstellende Geometrie nötige Material, vorgeschrieben sind; die übrigen Kapitel betreffen spezielle Flächen. Da sich nun für jede Kategorie von Flächen dieselben Aufgaben darbieten, so läßt sich danach das ganze Material ordnen, indem wir entweder ein und dieselbe Aufgabe (z. B. die Konstruktion der Tangentialebene) der Reihe nach für alle Arten von Flächen lösen, oder für dieselbe Fläche alle bezüglichen Aufgaben. Wir sind in der letzteren Weise verfahren, weil so jedes Kapitel sich als eine abgeschlossene Monographie einer speziellen Fläche darstellt. Dennoch sind im ersten Kapitel die allgemeinen Methoden, soweit als sie für die Lösung der Hauptaufgaben in Betracht kommen, angedeutet. Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit den Flächen zweiter Ordnung, welche Gebilde dem Leser schon aus der Geometrie der Lage und der analytischen Geometrie bekannt sein dürften, die aber hier von einem neuen Gesichtspunkte aus untersucht werden, der vielfache Anwendungen der Kegelschnittlehre gestattet. Es folgen dann im dritten Kapitel die Kegel- und Zylinderflächen, die in den einfacheren Spezialfällen dem Leser schon aus den Elementen der Geometrie bekannt sind. Da diese, wie die Flächen zweiter Ordnung, unzählig viele Geraden enthalten, so führen sie natürlich auf die Regelflächen, deren allgemeine Theorie in dem durch das Werk vorgeschriebenen Umfange das vierte Kapitel bringt. Erläutert wird dieses durch einige Spezialfälle, die durch ihre theoretischen und praktischen Anwendungen bemerkenswert sind.

Die beiden letzten noch betrachteten Flächenarten entstehen aus dem Begriffe der Bewegung; es sind die im fünften Kapitel behandelten Rotationsflächen und die Schraubenflächen im sechsten Kapitel. Es wurden die wichtigsten Sätze über diese aufgestellt und die Fundamentalaufgaben gelöst. Bezüglich der letzteren fanden besondere Behandlung die bemerkenswertesten Spezialfälle, insbesondere diejenigen, die durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden, die Schraubenregelflächen.

Bei allen diesen Flächen kam nur das Wesentliche zur Behandlung, weil diese Vorlesungen, wie schon in der Vorrede zum ersten Teile be-

merkt, nicht eine vollständige Behandlung der darstellenden Geometrie sein sollen, sondern nur eine methodische Sammlung der verschiedenen Verfahren, die für die Lösung der betreffenden Aufgaben zur Anwendung kommen. Wenn wir dabei das eine oder andere weniger Wichtige übergangen haben, so können wir uns die Worte Descartes zu eigen machen, der zum Schlusse seiner Géométrie schrieb, daß „nos neveux me seront gré, non seulement des choses que j'ai ici expliquées, mais aussi de celles que j'ai omises volontairément, afin de leur laisser le plaisir de les inventer". Um diese Möglichheit zu sichern, haben wir uns bestrebt, die Lösungen der verschiedenen Probleme unter den möglichst allgemeinen Bedingungen inbezug auf die Lage der Bezugselemente gegen die untersuchten Gebilde darzubieten.

Da es unsere Absicht war, ein theoretishes Werk der darstellenden Geometrie zu schreiben, das speziell für diejenigen Studierenden bestimmt sein soll, die sich dem Unterrichte widmen wollen, so haben wir alles ausgeschlossen, was Schattenkonstruktionen und andere rein praktische Anwendungen betrifft. Dennoch schmeicheln wir uns, daß der Leser, der veranlaßt wird, zu seiner weiteren Belehrung auf diesbezügliche Spezialabhandlungen zurückzugreifen, erkennen wird, daß in dem vorliegenden Werke sich alles zu seiner Aufklärung notwendige Material findet.

Ich kann und möchte nicht von meinem Leser zum zweiten Male Abschied nehmen, ohne Herrn Prof. Schütte für seine wertvolle Mitarbeit, die er mir ständig geleistet hat, meinen Dank auszudrücken, ebenso der Verlagsbuchhandlung Teubner für ihren Rat und die Sorge für die schöne Ausstattung auch des vorliegenden Bandes.

Genua, den 20. Februar 1913.

Gino Loria.

Inhalts-Verzeichnis.

II. Teil. Anwendung auf ebenflächige Figuren, Kurven und Flächen.

Erstes Buch.

Körperliche Ecken und Polyeder.

Kapitel I. **Das Dreiflach.**

Kapitel II. **Bemerkungen über Polyeder im allgemeinen und über einige spezielle bemerkenswerte Polyeder.**

Kapitel III. **Die Darstellung der Polyeder.**

Kapitel IV. **Die Fundamentalaufgaben über Polyeder.**



Zweites Buch.

Kurven.

Kapitel I. **Ebene Kurven.**

Kapitel II. **Raumkurven im allgemeinen.**

Seite

Zweiter Teil.

Anwendung auf ebenflächige Gebilde, Kurven und Oberflächen.

Die im ersten Teile dargelegten Methoden wollen wir nun auf die Untersuchung und Darstellung der wichtigsten geometrischen Figuren anwenden. Diejenigen von ihnen, die schon in der elementaren Geometrie behandelt zu werden pflegen, setzen wir als dem Leser bekannt voraus, weshalb wir bei ihnen an ihre allgemeinen Eigenschaften nur erinnern werden, während wir bei den übrigen zuerst ihre wichtigsten Eigenschaften darlegen wollen. Wir werden uns mit Vorliebe der Mongeschen Methode bedienen, jedoch wird das angegebene Verfahren im allgemeinen sich auch leicht auf die Methoden der Zentralprojektion oder der kotierten Ebenen übertragen lassen. Überhaupt sei diese Übertragung dem Leser, der sich mit den Methoden der darstellenden Geometrie recht vertraut machen will, warm empfohlen. Es sei ferner nicht unerwähnt, daß er hier reiches Material für lehrreiche und interessante Anwendungen auf die der Axonometrie und der Photogrammetrie angehörigen Verfahren findet.

Erstes Buch.

Körperliche Ecken und Polyeder.

Erstes Kapitel.

Das Dreiflach.

140. Ein beliebiger Punkt auf einer Geraden teilt diese in zwei Halbgeraden oder Strahlen. Zwei Strahlen, die von demselben Punkte ausgehen, bilden einen (einfachen) Winkel. Eine Gruppe von Winkeln im Raume derart, daß jeder folgende mit dem vorhergehenden, und der letzte mit dem ersten einen Schenkel gemeinsam hat, bildet eine körperliche Ecke oder ein Vielflach, im besonderen ein Dreiflach, Vierflach usw. je nachdem die Zahl der auftretenden Winkel 3, 4 usw. ist.

Die Ebenen der Winkel heißen die Flächen der körperlichen Ecke, die Schenkel die Kanten, der gemeinsame Treffpunkt der



Kanten heißt die Ecke oder der Scheitel der körperlichen Ecke; die Zahl der Flächen ist natürlich gleich der Anzahl der Kanten. Eine Ecke heißt konvex oder konkav, je nachdem ihre Flächen sämtlich auf derselben Seite einer beliebigen von ihnen liegen, oder nicht. Zwei beliebige aufeinander folgende Flächen einer körperlichen Ecke bilden miteinander vier Flächenwinkel, deren Summe vier Rechte beträgt, und von denen jeder als Flächenwinkel der betrachteten körperlichen Ecke angesehen werden könnte. Um die richtige Wahl desselben festzulegen, ohne dabei die gegebenen Stücke einer Einschränkung zu unterwerfen, kann man folgenden Kunstgriff benutzen: Es seien $k_1, k_2 \ldots k_n$ die Kanten der körperlichen Ecke in der Reihenfolge, wie sie bei der Bildung dieser Ecke aufeinander folgen, und $\epsilon_1, \epsilon_2 \ldots \epsilon_n$ die Ebenen der Seitenflächen; man denke sich nun bei einer der Ebenen, etwa ϵ_1, eine Seite weiß, die andere schwarz gefärbt,

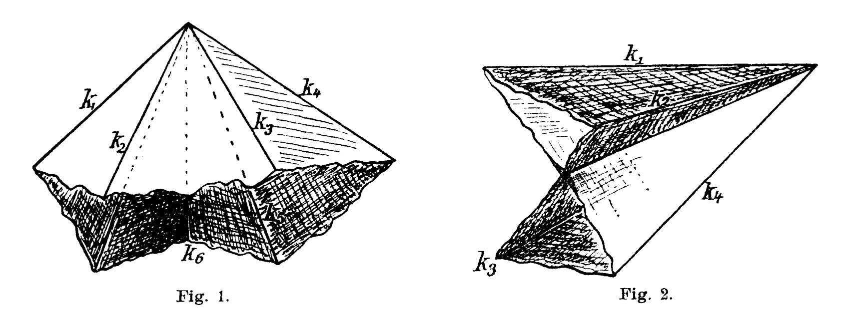


Fig. 1. Fig. 2.

und zwar den Teil, der zwischen den Kanten k_1 und k_2 liegt. Man färbe nun denjenigen zwischen k_2 und k_3 liegenden Teil der Ebene ϵ_2 schwarz, der die Fortsetzung des vorhin gefärbten Teiles ist. Fährt man so fort, so erhält man schließlich die ganze körperliche Ecke von einer Seite her kontinuierlich schwarz gefärbt. Mit anderen Worten: man erhält auf der körperlichen Ecke eine (schwarze) positive und eine negative Seite (Fig. 1 u. 2). Wir nehmen nun als Flächenwinkel diejenigen, die von zwei aufeinander folgenden positiven Flächen gebildet werden. Hieraus geht hervor, daß, wenn man auch die Kanten kennt, doch der Flächenwinkel noch nicht bestimmt ist, da man noch über die Lage der positiven Seite verfügen kann, deren Angabe zur Festlegung der Flächenwinkel notwendig ist. Handelt es sich um eine dreiseitige Ecke, so ergibt sich die eine Ecke als konkav und hat lauter überstumpfe Flächenwinkel, die andere als konvex, mit spitzen oder stumpfen Winkeln; gewöhnlich pflegt man nur die letztere zu betrachten.

Verlängert man die sämtlichen Kanten einer körperlichen Ecke über den Scheitel hinaus, so erhält man eine zweite, sogenannte Scheitelecke, deren Kanten- und Flächenwinkel den entsprechenden der ersten

Ecke gleich sind, aber in entgegengesetzter Reihenfolge liegen, weshalb die neue Ecke im allgemeinen nur symmetrisch zur ersten ist, aber im Raume nicht mit ihr zur Deckung gebracht werden kann.

Nehmen wir im Raume beliebig einen Punkt U an und fällen von diesem die Lote $l_1, l_2 \ldots l_n$ auf die Ebenen $\epsilon_1, \epsilon_2 \ldots \epsilon_n$, nehmen dann diejenigen Halbstrahlen dieser Senkrechten, die von der positiven Seite aus nach U hinlaufen, so bilden diese die Kanten einer neuen Ecke, welche die reziproke oder Polarecke der gegebenen heißt. Ihre Flächen sind senkrecht zu den Kanten der ursprünglichen Ecke, und auf jeder Fläche ist die positive Seite festgelegt. Verlegen wir den Punkt U, so ändert sich die Ecke, jedoch so, daß sie immer zu sich selber kongruent bleibt. Nehmen wir jetzt den Scheitelpunkt V der ursprünglichen Ecke und konstruieren die reziproke Ecke zu der neuen, so erhalten wir wieder die ursprüngliche Ecke. Bei einer dreiseitigen körperlichen Ecke sind die Flächenwinkel der einen die Supplemente der Kantenwinkel der andern (reziproken) Ecke und umgekehrt.

141. Jedes n-Flach läßt sich durch $n-3$ Ebenen, die von einer Kante ausgehen und durch eine andere gehen, in $n-2$ Dreiflache zerlegen; somit ist die Konstruktion einer beliebigen Ecke zurückführbar auf die wiederholte Konstruktion eines Dreiflachs. Daraus ergibt sich die große Wichtigkeit aller Aufgaben, die sich auf die Konstruktion einer dreiseitigen körperlichen Ecke aus den hinreichenden Stücken beziehen. Derartige Aufgaben sind (wie die auf die Konstruktion ebener Dreiecke bezüglichen) unzählig, doch gibt es unter ihnen einige, die von besonderer Wichtigkeit sind, und daher als Fundamentalaufgaben bezeichnet werden; auf diese wollen wir uns hier beschränken.

Eine Kugel, deren Mittelpunkt im Scheitel der dreiseitigen körperlichen Ecke liegt, wird von den Kanten und Flächen in den Ecken und Seiten eines sphärischen Dreiecks geschnitten; kennt man dieses, so hat man damit auch die Stücke des Dreiflachs und umgekehrt. Somit ist die Aufgabe der Auflösung eines Dreiflachs im Grunde nicht verschieden von der, die den Hauptgegenstand der sphärischen Trigonometrie bildet.

Wir wollen immer annehmen, daß die betrachteten Dreiflache konvex seien, und daß also ihre Seiten und Winkel kleiner als zwei Rechte sind. Dann ist jede Seite kleiner als die Summe, aber größer als die Differenz der beiden anderen Seiten, und die Summe der drei Seiten ist kleiner als vier Rechte.

Bei jedem Dreiflach wollen wir den Scheitel mit V, die drei Kanten mit a, b, c bezeichnen; die Seiten, d. h. die (Größe der) ebenen Winkel zwischen den Kanten, sollen mit α, β, γ, dagegen die

Winkel, d. h. die (Größe der) Neigungswinkel der Flächen an den Kanten a, b, c, bzw. mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ bezeichnet werden. Nehmen wir $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$ an, und bestehen die Beziehungen

$$0 < \alpha + \beta + \gamma < 2\pi, \quad \alpha < \beta + \gamma,$$

so wird auch $\beta < \gamma + \alpha$, und $\gamma < \alpha + \beta$ sein. Bezeichnen wir nun die analogen Stücke der Polarecke durch einen Stern, so bestehen die Beziehungen:

$$\alpha^* + \mathfrak{A} = \beta^* + \mathfrak{B} = \gamma^* + \mathfrak{C} = \alpha + \mathfrak{A}^* = \beta + \mathfrak{B}^* = \gamma + \mathfrak{C}^* = \pi.$$

Wenden wir die oben angeführten Beziehungen zwischen den Seiten eines Dreiflachs auf die Polarecke an, so erhält man

$$\pi < \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} < 3\pi;$$

und wenn $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{B} \leqq \mathfrak{C}, \quad \pi + \mathfrak{A} < \mathfrak{B} + \mathfrak{C}.$

142. Von den Aufgaben, die sich auf die Konstruktion eines Dreiflachs beziehen, pflegt man sechs, die zu je zweien einander dual sind, als Fundamentalaufgaben zu bezeichnen:

I. Gegeben die drei Seiten.	IV. Gegeben die drei Winkel.
II. „ zwei Seiten u. der von ihnen eingeschlossene Winkel.	V. „ eine Seite und die beiden anliegenden Winkel.
III. Gegeben zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel.	VI. Gegeben zwei Winkel und eine der ihnen gegenüberliegenden Seiten.

Die Betrachtung der Polarecke ermöglicht nun die Lösung der Aufgaben IV, V, VI auf die der Aufgaben I, II, III zurückzuführen, und umgekehrt. Nehmen wir beispielsweise an, daß die Aufgabe I gelöst sei, und nun $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ gegeben seien, also die Aufgabe IV vorliege, so hat die Polarecke, die drei Seiten $\pi - \mathfrak{A}$, $\pi - \mathfrak{B}$, $\pi - \mathfrak{C}$ und kann also nach I konstruiert werden; die Polarecke dieser letzteren ist dann die gesuchte Ecke. In ähnlicher Weise lassen sich die beiden anderen Fälle V und VI zurückführen auf II und III. Übrigens werden wir (in Nr. 144—9) sehen, daß analoge Betrachtungen uns dahin führen werden, direkt alle sechs angegebenen Fälle zu lösen.

Hier sei indes bemerkt, daß die Konstruktion eines Dreiflachs sich von zwei verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachten und behandeln läßt: Man kann nämlich entweder die tatsächliche Ausführung der Konstruktion im Raume und die Darstellung durch Zeichnung verlangen, oder die zeichnerische Auffindung der noch unbekannten Stücke mit Benutzung der gegebenen.

Vom ersteren Gesichtspunkte aus läßt sich die theoretische Lösung der drei ersten Aufgaben folgendermaßen darstellen:

I. Gegeben sind die drei Seiten α, β, γ. Man konstruiere einen Winkel $bc = \alpha$ mit dem Scheitelpunkte V; dann denke man sich zwei Kegel die ihre Spitze in V haben, der eine mit der Achse b und der Öffnung γ,[1]) der andere mit der Achse c und der Öffnung β; diese schneiden sich im allgemeinen in zwei Erzeugenden a und $\bar{a}$, von denen jede mit b und c das gesuchte Dreiflach bildet.

II. Gegeben sind die Seiten β und γ, sowie der Winkel $\mathfrak{A}$. Man konstruiere einen Winkel $ac = \beta$ mit dem Scheitel V; durch a lege man eine Ebene, die mit der Ebene ac einen Winkel $\mathfrak{A}$ bildet, und schneide sie mit dem Rotationskegel, dessen Achse a, und dessen Öffnung γ ist. Man erhält so zwei Geraden b, $\bar{b}$, die immer reell sind, und von denen jede mit a und c ein Dreiflach bildet, das der Aufgabe genügt.

III. Gegeben sind die beiden Seiten β und α sowie der Winkel $\mathfrak{A}$. Man konstruiere den Winkel $ac = \beta$ mit dem Scheitel V; durch a lege man eine Ebene, die mit der Ebene ac den Winkel $\mathfrak{A}$ bildet und schneide diese mit dem Kegel, dessen Achse c und dessen Öffnung α ist; die beiden Schnittlinien b, $\bar{b}$ bilden, falls sie reell sind, mit a und c zwei Dreiflache, die der Aufgabe genügen.

Zur Übung: In ähnlicher Weise die drei übrigen Fundamentalaufgaben zu lösen.

143. Wollen wir nun die so theoretisch angegebenen Lösungen in tatsächlicher Konstruktion ausführen, so müßten wir die lösenden Kegelflächen darzustellen und ihre Schnitte miteinander und mit den Ebenen aufzufinden wissen, was wir zunächst noch nicht können. Diese Schwierigkeit läßt sich umgehen, wenn man die gegebenen Stücke in geeigneter Weise zu zwei Bezugsebenen anordnet. Wir wollen dies an dem I. der angeführten Fälle zeigen und die Aufgabe in der Weise aussprechen, daß man deutlich erkennt, daß die Aufgabe identisch mit jener ist, die man in der praktischen Geometrie als die Reduktion eines Winkels auf den Horizont bezeichnet.

Gegeben sei ein Winkel γ mit den beiden Schenkeln a und b sowie dem Scheitel O, ebenso die Winkel β und α, die a und b mit der vertikalen durch O gehenden Geraden c bilden; dann gibt uns der von den beiden Geraden a' und b', den Projektionen von a und b auf eine horizontale Ebene, gebildete Winkel, den Flächenwinkel zwischen den Ebenen (ca) und (cb), und man sagt, „der Winkel ab sei auf den Horizont reduziert“. Um diesen Winkel zu bestimmen, bezeichnen wir mit A, B, C die Spurpunkte von a, b, c mit der horizontalen Ebene (s. Fig. 3), und nehmen als vertikale Projektionsebene die Ebene ac. Dann wird OC senkrecht zur Achse a' sein,

1) Unter Öffnung eines geraden Kreiskegels verstehen wir den konstanten Winkel der Erzeugenden mit der Achse.



und den Winkel COA müssen wir gleich β machen. Nun ziehen wir durch O die Gerade $O(B) \equiv (b)$, die mit OC den Winkel α bildet, sowie $(b)^*$, die mit a den Winkel γ bildet, so daß wir in der Figur zunächst alle Daten eingetragen haben. Da nun die Strecken bei der Umlegung ihre Länge beibehalten, so erhalten wir, indem wir von O aus auf $(b)^*$ die Länge $O(B)$ abtragen, $(B)^*$ die andere Umlegung des Punktes B in die Vertikalebene. Aus demselben Grunde wird der Punkt B selbst sowohl auf dem um C mit $\overline{C(B)}$, als auch auf dem um A mit $\overline{A(B)^*}$ beschriebenen Kreise liegen; B ist also einer der beiden Schnittpunkte dieser Linien. B mit C verbunden liefert b', und da a' mit der Achse zusammenfällt, so ist $\sphericalangle ACB$ der gesuchte. [Soll die Darstellung des Dreiflachs in der Vertikalprojektion vervollständigt werden, so hat man nur noch O mit B', der auf der Achse liegenden Projektion von B zu verbinden, dann hat man b''].

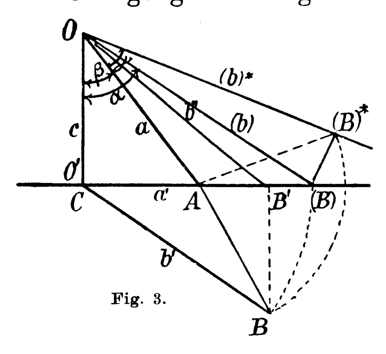


Fig. 3.

Zur Übung: Kann man in ähnlicher Weise die anderen Fundamentalaufgaben über das Dreiflach behandeln?

144. Von viel größerer Wichtigkeit sind die Lösungen der sechs Fundamentalaufgaben unter dem zweiten der in Nr. 142 angeführten Gesichtspunkte, die wir daher zu allernächst vollständig darlegen wollen; zuvor sei jedoch bemerkt, daß wir hierbei die Methode der Orthogonalprojektion anwendend mit einer **einzigen** Projektionsebene auskommen, und daß wir dabei (wie bei metrischen Aufgaben vorauszusehen) uns der Umlegungen mit großem Vorteil bedienen werden.

Aufgabe I. Gegeben die drei Seiten α, β, γ eines Dreiflachs: die Winkel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zu bestimmen.

Auflösung: Wir setzen natürlich voraus, daß α, β, γ der Bedingung genügen, daß ihre Summe kleiner als 2π sei, und daß jeder von ihnen kleiner sei, als die Summe der beiden anderen; hierzu genügt, wie schon bemerkt, daß die größte Seite die Summe der beiden anderen nicht übertrifft. Wir werden sehen, daß diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die Existenz des zu konstruierenden Dreiflachs ist; dieses wird alsdann sicher konvex sein. Wir wollen nun das Dreiflach mit einer Seite, z. B. bc auf die Zeichenebene legen, und uns vorstellen, daß sowohl die Seite ba, als auch ca in diese Ebene niedergelegt seien (Fig. 4); alsdann erhält die Kante a zwei Lagen $(a)_1$ und $(a)_2$, und es ist

$$\sphericalangle bc = \alpha, \quad \sphericalangle (a)_1 b = \gamma, \quad \sphericalangle (a)_2 c = \beta;$$



wir wollen annehmen, was ja der Allgemeinheit keinen Abbruch tut, daß $\gamma < \alpha$ sei. Es sei nun P irgend ein Punkt der Kante a, der zufolge der Umlegung auf $(a)_1$ und $(a)_2$ bzw. die Lagen (P_1) und (P_2) annimmt; dann ist $\overline{V(P)_1} = \overline{V(P)_2} = \overline{VP}$ gleich der (willkürlichen) Entfernung des Punktes P vom Scheitel V. Nunmehr wollen wir uns die beiden Seiten wieder in die ursprüngliche Lage gelegt denken und mit P' die Orthogonalprojektion von P auf die Zeichenebene bezeichnen. P' und die Umlegung $(P)_1$ liegen dann (gemäß Nr. 35) auf derselben zur Spurlinie b senkrechten Geraden, ebenso liegen P' und $(P)_2$ auf der Senkrechten zu c; P' ist also der Schnitt der von $(P)_1$ und $(P)_2$ auf b bzw. c gefällten Lote $(P)_1 B$ und $(P)_2 C$. Die Verbindungslinie VP' liefert uns die Projektion a' der dritten Kante a des Dreiflachs. Jetzt ist der Winkel PBP' der gesuchte Flächenwinkel $\mathfrak{B}$; wir erhalten ihn also, wenn wir das Dreieck PBP' in die Zeichenebene umlegen, indem wir es um die Kathete $P'B$ sich drehen lassen. P kommt dann in einen Punkt $(P)_3$ zu liegen auf der in P' zu $P'B$ errichteten Senkrechten in einem Abstande von B, der gleich PB oder gleich der Umlegung $(P)_1 B$ ist; der um B mit $\overline{B(P)_1}$ beschriebene Kreis schneidet die Senkrechte in zwei Punkten, deren jeder als $(P)_3$ genommen werden kann. Verbindet man $(P)_3$ mit B so ist $\sphericalangle (P)_3 BP'$ der gesuchte Flächenwinkel $\mathfrak{B}$. In gleicher Weise liefert der um C mit $\overline{C(P)_2}$ beschriebene Kreis und die in P' auf $P'C$ errichtete Senkrechte einen Punkt $(P)_4$ derart, daß $\sphericalangle (P)_4 CP' = \mathfrak{C}$. Als Kontrolle für die Richtigkeit der Zeichnung merke man, daß $P'(P)_3 = P'(P)_4$ sein muß, da diese Strecken die Umlegung derselben Strecke PP' sind.

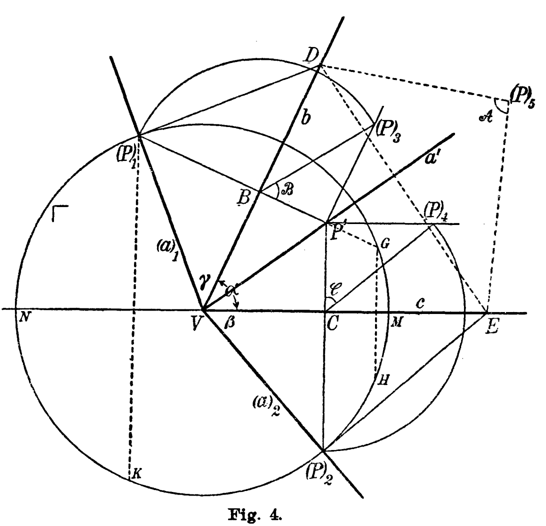


Fig. 4.

Es erübrigt jetzt noch den Flächenwinkel $\mathfrak{A}$ zu finden. Zu diesem Zwecke errichten wir in P auf der Kante a die Senkrechten in den Ebenen ab bzw. ac, nämlich PD bzw. PE; der von ihnen gebildete Winkel ist offenbar der gesuchte. Da nun die beiden Ebenen niedergelegt sind, so können wir diese Senkrechten auf $(a)_1$ bzw. $(a)_2$ in $(P)_1$ bzw. $(P)_2$ errichten, und sie treffen b und c in D und E. (Nebenbei bemerkt muß DE als Spur der Ebene PDE,

die senkrecht zu a ist, nach Nr. 30, Satz II, senkrecht zu a' sein, was als Kontrolle der Zeichnung dienen kann.) Jetzt braucht man nur das Dreieck DPE in die Zeichenebene umzulegen, was sehr leicht ist, da wir seine Seiten $\overline{DE}$, $\overline{PD} = \overline{(P)_1 D}$, $\overline{PE} = \overline{(P)_2 E}$ kennen. Wir beschreiben also um D und E mit $D(P)_1$ und $E(P)_2$ Kreise; einen ihrer Schnittpunkte $(P)_5$ verbinden wir mit D und E, dann ist $\sphericalangle D(P)_5 E = \mathfrak{A}$.

Diskussion: Denken wir uns um V als Mittelpunkt die Kugel mit dem Radius VP beschrieben, so wird sie von der Zeichenebene in einem Kreise Γ geschnitten, der die Punkte $(P)_1$ und $(P)_2$ enthält und innerhalb dessen die Projektionen aller reellen Punkte der Kugel fallen, also auch P', die des Punktes P, in welchem sich $(P)_1 B$ und $(P)_2 C$ schneiden. Um zu erkennen, wann dies zutrifft, bezeichnen wir mit G den zweiten Schnitt von Γ mit $(P)_1 B$, mit M und N die Schnitte der Geraden c, und mit H, K die zu G, $(P)_1$ in bezug auf c symmetrischen Punkte. Es ist klar, daß wenn $(P)_2$ auf einen der Kreisbögen MH oder NK fiele, alsdann P' außerhalb von Γ fallen würde.

Damit die Aufgabe möglich, muß also sein

$$\text{arc } MH < \text{arc } M(P)_2 < \text{arc } MK,$$

oder auch

$$\sphericalangle MVH < \sphericalangle MV(P)_2 < \sphericalangle MVK;$$

das heißt

$$\alpha - \gamma < \beta < \alpha + \gamma.$$

Diesen Bedingungen wird durch die anfangs gemachte Annahme genügt, also sind diese hinreichend, die Realität der Lösung zu verbürgen.

Folgesätze: Die Betrachtung der Figur 4 führt uns zu theoretischen Folgerungen von der größten Wichtigkeit, die wir jetzt dartun wollen. Setzen wir die Strecke $PV = r$, so ist offenbar:

$$\overline{VB} = r \cdot \cos\gamma, \quad \overline{VC} = r \cdot \cos\beta; \quad \overline{B(P)_1} = r \cdot \sin\gamma, \quad \overline{C(P)_2} = r \sin\beta;$$

$$\overline{D(P)_1} = r \cdot \operatorname{tg}\gamma, \quad \overline{E(P)_2} = r \cdot \operatorname{tg}\beta; \qquad \overline{VD} = \frac{r}{\cos\gamma}, \qquad \overline{VE} = \frac{r}{\cos\beta};$$

$$\overline{P'(P)_3} = \overline{B(P)_3} \cdot \sin\mathfrak{B}, \qquad \overline{P'(P)_4} = \overline{C(P)_4} \cdot \sin\mathfrak{C}.$$

Da aber, zufolge der Konstruktion, $\overline{B(P)_3} = \overline{B(P)_1}$, und $\overline{C(P)_4} = \overline{C(P)_2}$, und überdies $\overline{P'(P)_3} = \overline{P'(P)_4}$, so ist

$$r \cdot \sin\gamma \cdot \sin\mathfrak{B} = r \sin\beta \cdot \sin\mathfrak{C},$$

oder

$$\sin\beta : \sin\mathfrak{B} = \sin\gamma : \sin\mathfrak{C}.$$

Durch Analogieschlüsse können wir diese Beziehung vervollständigen und schreiben

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\mathfrak{A}} = \frac{\sin\beta}{\sin\mathfrak{B}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\mathfrak{C}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

daher der Satz: **In jedem Dreiflach sind die Sinus der Seiten proportional den Sinus der gegenüberliegenden Winkel.**

Beachten wir nun, daß die beiden Dreiecke DEV und $DE(P)_5$ die Seite DE gemeinsam haben, so erhalten wir, wenn wir diese nach dem Kosinussatze der ebenen Trigonometrie zweimal ausdrücken.

$$\overline{DE}^2 = \overline{VD}^2 + \overline{VE}^2 - 2\,\overline{VD}\cdot\overline{VE}\cos\alpha =$$
$$= \overline{(P)_5 D}^2 + \overline{(P)_5 E}^2 - 2\,\overline{(P)_5 D}\cdot\overline{(P)_5 E}\cdot\cos\mathfrak{A}.$$

Setzen wir nun für VD, VE die obigen Werte, und beachten, daß $D(P)_5 = D(P)_1$ und $E(P)_5 = E(P)_2$, so können wir auch dafür die gefundenen Werte setzen und erhalten so

$$\frac{r^2}{\cos^2\gamma} + \frac{r^2}{\cos^2\beta} - 2\,\frac{r^2\cos\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}$$
$$= r^2\operatorname{tg}^2\gamma + r^2\operatorname{tg}^2\beta - 2r^2\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma\cdot\cos\mathfrak{A}.$$

Hieraus entsteht nach einigen Reduktionen die erste der folgenden drei Formeln, während die andern durch zyklische Vertauschung daraus hervorgehen

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos\beta\cdot\cos\gamma + \sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos\mathfrak{A},\\ \cos\beta &= \cos\gamma\cdot\cos\alpha + \sin\gamma\cdot\sin\alpha\cdot\cos\mathfrak{B},\\ \cos\gamma &= \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\mathfrak{C}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(2)$$

Wenden wir diese Beziehungen auf die reziproke Ecke an, so erhalten wir

$$\cos(\pi-\mathfrak{A}) = \cos(\pi-\mathfrak{B})\cdot\cos(\pi-\mathfrak{C}) +$$
$$+ \sin(\pi-\mathfrak{B})\sin(\pi-\mathfrak{C})\cdot\cos(\pi-\alpha)$$

und zwei ähnliche, woraus dann folgt

$$\left.\begin{aligned}\cos\mathfrak{A} &= -\cos\mathfrak{B}\cdot\cos\mathfrak{C} + \sin\mathfrak{B}\cdot\sin\mathfrak{C}\cdot\cos\alpha,\\ \cos\mathfrak{B} &= -\cos\mathfrak{C}\cdot\cos\mathfrak{A} + \sin\mathfrak{C}\cdot\sin\mathfrak{A}\cdot\cos\beta,\\ \cos\mathfrak{C} &= -\cos\mathfrak{A}\cdot\cos\mathfrak{B} + \sin\mathfrak{A}\cdot\sin\mathfrak{B}\cdot\cos\gamma.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(3)$$

Schneiden wir das Dreiflach mit einer Kugel deren Zentrum V, deren Radius 1 ist, so erhalten wir ein sphärisches Dreieck mit den Seiten α, β, γ und den Winkeln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; demnach sind die Beziehungen (1), (2), (3) die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie, aus denen sich alle übrigen rechnerisch ableiten lassen.[1])

1) Tatsächlich genügt es, direkt nur die Gleichung (2) nachzuweisen, nachdem Gua de Malves, Lagrange, Gauß u. a. gezeigt haben, daß aus ihnen durch einfache algebraische Transformationen alle übrigen sich ergeben; vgl. A. von Braunmühl, *Vorl. über Geschichte der Trigonometrie* (Leipzig, 1903) S. 165, und J. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik*, II. Bd. (Leipzig, 1903) S. 258.

145. Aufgabe II. Gegeben zwei Seiten α, β eines Dreiflachs und der von ihnen eingeschlossene Winkel $\mathfrak{C}$, die dritte Seite und die beiden anderen Winkel zu finden.

Auflösung: Wir legen die Seite $ac = \beta$ in die Zeichenebene und denken uns die dritte Kante in diese umgelegt durch Rotation der Ebene bc um die Kante c. Sie erhält dann eine neue Lage (b), derart daß $\sphericalangle (b)c = \alpha$ (Fig. 5). Wir nehmen dann auf b einen beliebigen Punkt P an, dessen Umlegung (P) sein möge. Bringen wir jetzt die Seite bc wieder in ihre ursprüngliche Lage, so bekommt P eine solche Lage, daß seine Projektion P' sich auf dem von (P) auf c gefällten Lote $(P)C$ befinden muß und zwar derart, daß das rechtwinklige Dreieck $PP'C$ bei C den (spitzen) Winkel $\mathfrak{C}$ erhält, seine Hypotenuse $CP = C(P)$ ist bekannt; somit können wir seine Umlegung $CP'(P)^*$ leicht konstruieren. Die Gerade VP' ist dann die Projektion b' der dritten Kante. Um noch die dritte Seite γ zu finden, legen wir die Seite ab in die Zeichenebene um, sie um a drehend. Um die Lage $(b)_1$ zu erhalten, die b dann annimmt, genügt es die von $(P)_1$, der Umlegung von P zu finden. Es ist aber $V(P)_1 = VP = V(P)$ also liegt $(P)_1$ zunächst auf dem mit $V(P)$ um V beschriebenen Kreise Γ; außerdem liegen $(P)_1$ und P' auf derselben Senkrechten zu a, der Spur der umgelegten Ebene; also ist (P_1) einer der Schnitte dieser Senkrechten mit dem Kreise Γ. $(P)_1$ mit V verbunden liefert $(b)_1$ und $\sphericalangle a(b)_1 = \gamma$ ist die gesuchte Seite des Dreiflachs. Da wir jetzt alle drei Seiten kennen, so lassen sich die beiden noch fehlenden Winkel, nach dem bei der vorigen Aufgabe angegebenen Verfahren aufsuchen.

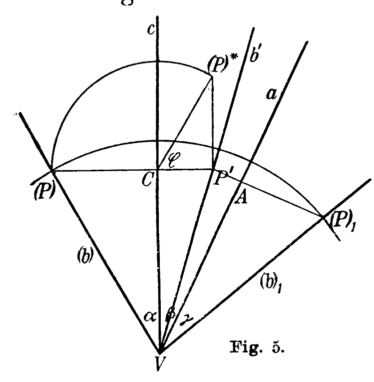


Fig. 5.

Diskussion: Aus dieser Konstruktion läßt sich ableiten, daß die vorliegende Aufgabe immer möglich ist. Setzen wir nämlich $\overline{VP} = r$, so ist:

$$\overline{VC} = r \cdot \cos\alpha, \quad \overline{C(P)} = \overline{C(P)}^* = r \sin\alpha,$$
$$\overline{CP'} = \overline{C(P)}^* \cdot \cos\mathfrak{C} = r \cdot \sin\alpha \cdot \cos\mathfrak{C},$$

daher

$$\overline{VP'}^2 = \overline{VC}^2 + \overline{CP'}^2 = r^2\cos^2\alpha +$$
$$+ r^2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\mathfrak{C} = r^2 - r^2\sin^2\alpha \cdot \sin^2\mathfrak{C}.$$

Hieraus folgt, daß $\overline{VP'} < r$. P' liegt also innerhalb des Kreises Γ, und das von P' auf a gefällte Lot schneidet diesen also immer in reellen Punkten.

146. Aufgabe III. Gegeben sind zwei Seiten eines Dreiflachs, α und β und ein gegenüberliegender Winkel $\mathfrak{A}$; gesucht die übrigen Stücke.

Auflösung: Eine der gegebenen Seiten, etwa $ac = \beta$ legen wir in die Zeichenebene, alsdann denken wir uns die andere α in diese Ebene umgelegt, indem wir sie um die gemeinsame Kante c drehen. Die Umlegung (b) der dritten Kante b erhalten wir dann offenbar, indem wir in V an c den Winkel α anlegen (Fig. 6). Dann legen wir senkrecht zur Kante a eine beliebige Ebene τ; ihre Spur wird eine zu a (in M) senkrechte Gerade t_1 sein, während die Seite ab in einer Geraden s von τ geschnitten wird, die mit t_1 den Neigungswinkel $\mathfrak{A}$ bildet. Ziehen wir demnach durch M eine Gerade die mit t_1 den Winkel $\mathfrak{A}$ bildet, so kann sie als die Umlegung (s) der Geraden s angesehen werden, wenn wir τ in die Zeichenebene niederklappen. Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt der Kante b, etwa den, dessen Umlegung (P) ist. Denken wir uns nun die Seite bc wieder in ihre ursprüngliche Lage gebracht, so wird P einen Kreisbogen beschreiben, der in einer zur Zeichenebene senkrechten Ebene liegt, deren Spur die durch (P) senkrecht zu c gezogene Gerade u_1 sein muß. Sind nun A und C die Schnittpunkte von u_1 mit a und c, so handelt es sich vorerst um die Umlegung des Dreieckes ACP, wenn man es um AC sich drehen läßt. Wir betrachten deshalb den Punkt N, in dem sich die Geraden AP und s (die beide der Fläche ab angehören) schneiden; da u_1 und t_1 die Projektionen dieser Geraden sind, so verdient ihr Schnittpunkt den Namen N'. Denken wir uns jetzt die Ebene τ niedergelegt, so kommt N in eine Lage (N) sowohl auf (s), als auch auf der in N' zu t_1 errichteten Senkrechten zu liegen; (N) ist also leicht zu finden. Legen wir aber die Ebene ACP nieder, sie drehend um u_1, so kommt N als $(N)^*$ auf der in N' zu u_1 errichteten Senkrechten zu liegen, und zwar in einem Abstande $\overline{N'N} = \overline{N'(N)}$, woraus sich $(N)^*$ sogleich ergibt. Nun lagen die Punkte A, N, P in gerader Linie, also muß $(P)^*$ auf $A(N)^*$ zu liegen kommen (A fällt ja mit seiner eigenen Umlegung zusammen) und zwar in einem Abstande von C gleich $\overline{CP} = \overline{C(P)}$; der mit $\overline{C(P)}$ um C beschriebene Kreis wird also $A(N)^*$ in den Punkten $(P)^*$ bzw. $(P)^{**}$ treffen. Jedes der beiden Dreiecke $AC(P)^*$ und $AC(P)^{**}$ kann als Umlegung von ACP gelten.

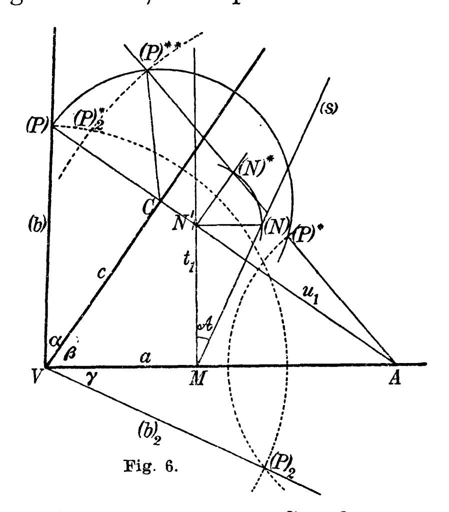


Fig. 6.

Nunmehr haben wir noch die Umlegung $AV(P)_2$ des Dreieckes AVP aufzusuchen, um die Seite γ zu erhalten. Da nun $\overline{(P)_2V} = \overline{PV} = \overline{(P)V}$, so fällt $(P)_2$ auf die Peripherie des mit $\overline{V(P)}$ um V beschriebenen Kreises; und da $\overline{A(P)_2} = \overline{A(P)} = \overline{A(P)^*}$ oder auch $= \overline{A(P)^{**}}$, so fällt es auch auf die Peripherie des mit $\overline{A(P)^*}$ [oder auch $\overline{A(P)^{**}}$] um A beschriebenen Kreises, kann also leicht konstruiert werden. Es seien nun $(P)_2$ und $(P)_2^*$ die beiden sich ergebenden Punkte;[1]) verbindet man sie mit V, so kann jede der Verbindungslinien als Umlegung der Kante b (bei einer Rotation um a) angesehen werden; sind $(b)_2$ und $(b)_2^*$ diese Linien, so bilden sie mit a die Winkel γ und γ^*, von denen jeder als die dritte Seite eines den gestellten Bedingungen genügenden Dreiflachs angesehen werden kann.

Da man nun alle drei Seiten und noch einen Winkel kennt, so kann man die übrigen Stücke nach den früher angegebenen Methoden auffinden. — Damit die Aufgabe lösbar ist, muß

$$\frac{\sin \mathfrak{A} \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} < 1,$$

indem nach Gl. (1) die linke Seite gleich $\sin \mathfrak{B}$ ist.

147. Aufgabe IV. Gegeben sind eine Seite γ eines Dreiflachs und die beiden anliegenden Winkel $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$: die übrigen Stücke zu finden.

Auflösung: Die Kanten a und b, die den gegebenen Winkel γ einschließen, legen wir in die Zeichenebene und schneiden das Dreiflach durch eine zu a senkrechte Ebene τ, diese treffe die Kanten a, b, c in den Punkten A, B, C (s. Fig. 7). Die Gerade AB ist dann die Spur t_1 von τ; AC nennen wir m, BC n. Klappt man die Ebene τ um, so wird (m) dann offenbar jene Gerade, die mit t_1 bei A den Winkel $\mathfrak{A}$ bildet. Wir bestimmen zunächst die durch Rotation um t_1 entstehende Umlegung des Dreiecks ABC. Es sei nun N ein beliebiger Hilfspunkt auf n, dann dürfen wir seine Projektion N' auf t_1 beliebig wählen. Fällen wir nun von N' das Lot $N'H$ auf b, so ist der Winkel NHN' der Neigungswinkel $\mathfrak{B}$

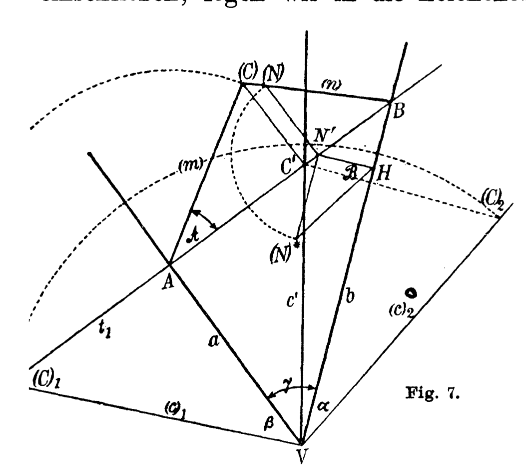


Fig. 7.

1) Eigentlich gibt es vier solcher Punkte, jedoch sind sie paarweise symmetrisch in bezug auf a.

des Dreiflachs. Zeichnen wir daher über $N'H$ als Kathete das rechtwinklige Dreieck $N'H(N)^*$ mit dem Winkel $\mathfrak{B}$ bei H, so ist $N'(N)^* = N'(N)$. Errichten wir nun in N' auf t_1 eine Senkrechte $N'(N) = N'(N^*)$, so ist (N) die Lage, die N annimmt, wenn ABC in der gedachten Weise umgelegt wird; $B(N)$ ist also (n), und diese Gerade schneidet (m) in dem gesuchten Punkte (C). Nachdem so die Umlegung des Dreiecks ABC gefunden ist, ergibt sich C' als Fußpunkt des von (C) auf t_1 gefällten Lotes, und c' als Verbindungslinie von C' mit V. — Jetzt legen wir auch die Seiten ac und bc in die Zeichenebene um. Im ersten Falle kommt C als $(C)_1$ auf der zu a in A errichteten Senkrechten, in einem Abstande $\overline{A(C)_1} = \overline{A(C)}$ zu liegen; im zweiten Falle, wo wir um b drehen, auf dem von C auf b gefällten Lote in einem Punkte $(C)_2$ derart, daß $\overline{V(C)_2} = \overline{V(C)_1}$; somit ist $(C)_2$ einer der beiden Punkte, in denen der um V mit $\overline{V(C)_1}$ beschriebene Kreis jenes Lot trifft. Verbinden wir nun V mit $(C)_2$, so erhalten wir die Umlegung $(c)_2$ von c, und $\sphericalangle\, b(c)_2 = \alpha$; verbinden wir V mit $(C)_1$, so erhalten wir die Umlegung $(c)_1$, und $\sphericalangle\, b(c)_2 = \beta$. Der dritte Winkel $\mathfrak{C}$ läßt sich nun nach Aufgabe I bestimmen. Nach Formel (3) auf S. 9 darf, damit die Aufgabe möglich sei, der absolute Wert von $\sin \mathfrak{A} \sin \mathfrak{B} \cos \gamma - \cos \mathfrak{A} \cos \mathfrak{B}$ nicht größer als Eins sein.

148. Aufgabe V. Gegeben zwei Winkel $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eines Dreiflachs sowie eine gegenüberliegende Seite β: die übrigen Stücke zu bestimmen.

Auflösung: Wir denken uns das fragliche Dreiflach mit der (allerdings noch unbekannten) Seite $ab \equiv \gamma$ auf die Zeichenebene gelegt; dann können wir den Scheitel V und die Kante a beliebig wählen (s. Fig. 8). Wir legen dann die Seite β in die Zeichenebene um, dann gelangt c in eine Lage $(c)_1$ so, daß $\sphericalangle\, (c)_1 a = \beta$. Auf der Kante c nehmen wir nun einen beliebigen Punkt P, etwa denjenigen der auf $(c)_1$ in $(P)_1$ fällt; seine Projektion P' liegt dann auf dem von $(P)_1$ auf a gefällten Lote t_1. Nun hat das Dreieck PAP' bei P' diesen rechten Winkel und bei A den Winkel $\mathfrak{A}$; seine Hypotenuse $\overline{AP} = \overline{A(P)_1}$. Zeichnen wir also eine Strecke $A(P)$ die mit AP' den Winkel $\mathfrak{A}$ bildet und gleich $A(P)_1$ ist, so ist die Projektion von (P) auf t_1 der Punkt P', der mit V verbunden c' liefert. Denken wir uns jetzt durch P die zur Kante b senkrechte Ebene

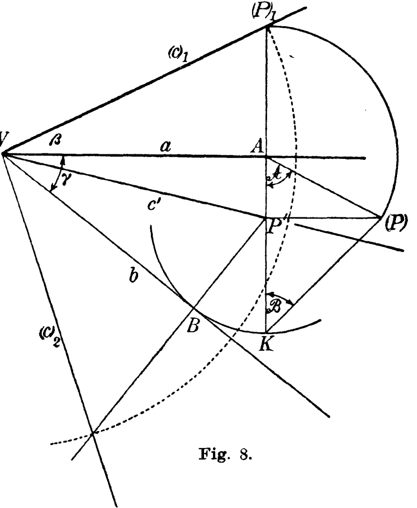


Fig. 8.

gelegt; ihre Spur u_1 ist das von P' auf b gefällte Lot, dessen Fußpunkt B heißen möge. Nun hat das Dreieck $PP'B$ bei P' einen rechten Winkel, bei B aber den Winkel $\mathfrak{B}$ und seine Kathete $\overline{PP'} = \overline{(P)P'}$, und daher kann man leicht die andere Kathete $P'K$ zeichnen. Beschreibt man nun mit $P'K$ um P' einen Kreis, so kann jede der beiden von V an diesen gezogenen Tangenten als die Kante b genommen werden. Die Gerade $P'B$ wird nun von dem mit $V(P)_1$ um V beschriebenen Kreise in zwei Punkten geschnitten; ist $(P)_2$ einer von diesen, so ist die Gerade $V(P)_2$ die Lage $(c)_2$, die c annimmt, wenn man die Seite bc um b drehend in die Zeichenebene niederlegt, also ist $\sphericalangle\, b(c)_2 = \alpha$. — Da nun alle drei Seiten des Dreiflachs bekannt sind, so läßt sich der dritte Winkel $\mathfrak{C}$ nach Nr. 144 finden.

Damit die Lösung möglich sei, muß nach Gl. (1) auf S. 8 $\sin \mathfrak{B} > \sin \beta \cdot \sin \mathfrak{A}$ sein.

149. Aufgabe VI. Die Seiten eines Dreiflachs zu bestimmen, wenn man die Winkel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ kennt.

Auflösung: Wir denken uns das betreffende Dreiflach so gelagert, daß eine seiner Kanten, etwa c, senkrecht auf der Zeichenebene π_1 steht, und daß π_1 die Kanten a, b, c bzw. in A, B, C schneide, dann ist offenbar $\sphericalangle\, ACB = \mathfrak{C}$. Da nun die Ebene $VAB \equiv ac$ senkrecht zu π_1 ist, so kann sie als Aufrißebene π_2 eines Mongeschen Systems angesehen werden, dessen Achse die Gerade AC ist (s. Fig. 9). AB ist dagegen die Horizontalspur der Ebene ab, die mit $\pi_2 \equiv ac$ den Winkel $\mathfrak{A}$ bildet.[1]) Um nun in der Figur diesen Winkel zu zeichnen, legen wir durch C eine Ebene senkrecht zur Kante a, die a in P treffen möge, und die in π_1 liegende Gerade AB in D. Dann ist das Dreieck PCD bei C rechtwinklig und hat bei P den Winkel $\mathfrak{A}$. Drehen wir nun dieses Dreieck um CD, bis es in die Zeichenebene π_1 fällt so kommt P auf die Gerade AC zu liegen, und D auf die in C zu AC errichtete Senkrechte. Da wir aber bis jetzt noch nicht festgelegt haben, wie hoch der Scheitel V über der π_1 liegt, so können wir noch die Länge CD beliebig wählen und also den Punkt (P) so auf der Geraden $CA \equiv a'$ wählen, daß $\sphericalangle\, C(P)D = \mathfrak{A}$. Beachten wir nun sogleich, daß das von C auf $D(P)$ gefällte Lot $C(H)$ gleich dem Abstande des Punktes C von der Ebene ab sein wird.

Wir betrachten jetzt ebenso die durch C senkrecht zur Kante b gelegte Ebene und das (analog wie CDP) entstehende Dreieck CEQ und legen es um CE drehend in π_1 um; dann kommt Q auf CB zu liegen, und E auf der in C zu $CB \equiv b'$ errichteten Senkrechten.

1) Zum Verständnis des Folgenden vgl. das in Nr. 40c (Bd. I, S. 69) angegebene Verfahren, die Neigungen einer durch ihre Spuren bestimmten Ebene zu finden.

Überdies ist das von C auf $E(Q)$ gefällte Lot gleich $C(H)$, weil es ja den Abstand des Punktes C von der Ebene ab angibt. Beschreiben wir also mit $C(H)$ um C einen Kreis und ziehen an ihn die Tangente, welche mit b' den Winkel $\mathfrak{B}$ bildet, so trifft sie b' in Q und die Senkrechte in E. DE liefert uns die Spurlinie t_1 der Ebene ab; ihre Schnitte mit den schon gezeichneten Geraden a' und b' liefern die Spurpunkte A, B der Kanten a, b.

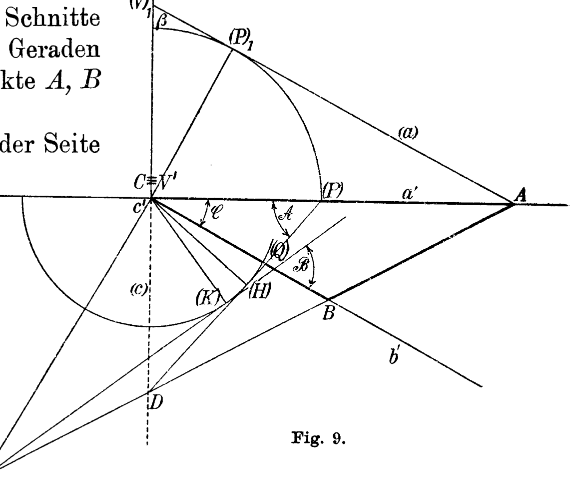


Fig. 9.

Um jetzt die Umlegung der Seite AVC zu erhalten, konstruieren wir zunächst die entsprechende Umlegung $AC(P)_1$ des Dreiecks ACP. Dies ist rechtwinklig bei P; wenn wir also um C mit $\overline{C(P)}$ den Kreis beschreiben und an diesen von A eine Tangente ziehen, so haben wir im Berührungspunkte den Punkt $(P)_1$, und seine Verbindung mit A wird (a) sein. Da nun $\sphericalangle ACV = \frac{\pi}{2}$, so fällt die Umlegung (c) von c in die Gerade CD, und in dem Schnittpunkte $(V)_1 \equiv (c)(a)$ erhalten wir den $\sphericalangle A V_1 C = \beta$.

Ebenso liefert die von B an den Kreis um C mit dem Radius $C(Q)$ gezogene Tangente $(b)_2$ im Schnittpunkte $(V)_2$ mit CE den Winkel $B(V)_2 C = \alpha$. — Um endlich noch die Seite γ zu bestimmen, haben wir nur das Dreieck AVB in die π_1 umzulegen, indem wir es um AB drehen; das ist leicht, weil ja $\overline{AV} = \overline{A(V)_2}$, $\overline{BV} = \overline{B(V)_2}$. Man braucht also nur einen der Schnittpunkte der beiden mit $\overline{AV_1}$ um A und $\overline{B(V)_2}$ um B beschriebenen Kreise zu zeichnen, etwa $(V)_3$; dann ist $\sphericalangle A(V)_3 B = \gamma$, und die übrigen Stücke sind in bekannter Weise zu finden.

150. Wir wollen nun an zwei Beispielen zeigen, wie aus der Konstruktion des Dreiflachs sich die Lösungen anderer wichtiger geometrischer Aufgaben ergeben.

a) Gegeben zwei windschiefe Geraden a und b: eine dritte x zu konstruieren, die mit ihnen die beiden gegebenen Winkel α und β bildet und durch einen gegebenen Punkt P geht.

Es genügt offenbar von der Geraden x die Richtung zu bestimmen, denn hat man diese gefunden, so ist die Aufgabe zurückgeführt auf die Konstruktion einer Geraden von gegebener Richtung, die durch

einen gegebenen Punkt P geht. Wir denken uns durch einen beliebigen Punkt V des Raumes die Geraden a_1, b_1, x_1 gezogen, die bzw. parallel zu a, b, x sind. Diese bilden dann ein Dreiflach, dessen Seiten $a_1 b_1 = ab$, $a_1 x_1 = \beta$, $b_1 x_1 = \alpha$ bekannt sind, und damit auch das Dreiflach selbst. Wir konstruieren die Winkel $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ an den Kanten a_1 und b_1; x_1 ist dann die Schnittlinie der beiden Ebenen, von denen die eine durch a_1 gehend mit $a_1 b_1$ den Winkel $\mathfrak{A}$ bildet, die andere durch b_1 gehend mit derselben Ebene den Winkel $\mathfrak{B}$ bildet, diese Ebenen und jene Gerade lassen sich nun (nach Nr. 40 Bd. I, S. 68, Übungsaufg.) finden. Legen wir jetzt durch a und b die zu x_1 parallelen Ebenen, so schneiden sie sich in einer Geraden, welche die Richtung der gesuchten hat.

b) Gegeben zwei Ebenen α und β: gesucht eine dritte ξ, die mit jenen die gegebenen Winkel $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bildet und durch einen Punkt P geht.

Auch hier konstruieren wir zunächst die Stellung der Ebene ξ. Durch einen beliebigen Punkt V der Geraden $\alpha\beta$ denken wir uns die zu ξ parallele Ebene ξ_1 gelegt; dann bilden α, β, ξ_1 ein Dreiflach, dessen Winkel bekannt sind, dessen Seiten also gefunden werden können. Man kennt also den Winkel, den die Gerade $\alpha\beta$ mit der Geraden $\alpha\xi_1$ bildet, also kann diese Gerade, die durch den Hilfspunkt V geht und in der gegebenen Ebene α liegt, (nach Nr. 39, Übung III) konstruiert werden. Ähnlich läßt sich auch die Gerade $\beta\xi_1$ bestimmen. Beide Geraden bestimmen die Ebene ξ_1, und ξ ist die durch P zu ξ_1 gelegte parallele Ebene.

Zur Übung: I. Gegeben zwei windschiefe Geraden: eine dritte zu konstruieren, die beide schneidet und mit ihnen gegebene Winkel bildet. **II.** Einen Winkel von gegebener Größe darzustellen, wenn man kennt den Scheitelpunkt $V \equiv (V', V'')$, einen Schenkel $a \equiv (a', a'')$ und die Neigung des anderen Schenkels b gegen die Horizontalebene. [Anleitung: Zieht man durch V die Vertikale c, so entsteht ein Dreiflach, dessen Seiten bekannt sind; daraus lassen sich die Winkel ableiten, z. B. der von der bekannten Ebene ca mit cb gebildete, folglich kann man diese Ebene leicht finden, usw.]

Zweites Kapitel.

Bemerkungen über die Polyeder im allgemeinen und über einige spezielle bemerkenswerte Polyeder.[1])

151. In der elementaren Geometrie versteht man unter einem Vieleck (Polygon) einen, von aneinander stoßenden Strecken begrenzten Teil der Ebene. Nun haben wir schon (in Nr. 60) bemerkt, daß eine derartige Figur durch Projektion in eine andere übergehen kann, die

1) Bezüglich weiterer Einzelheiten über dieses wichtige Gebiet siehe man M. Brückner, *Vielecke und Vielflache, Theorie und Geschichte* (Leipzig, 1900).



außer durch Strecken auch durch Pseudostrecken begrenzt wird, und die wir ein Pseudopolygon genannt haben. Es erweist sich als notwendig, den Begriff des Polygons noch weiter auszudehnen und diejenigen Teile einer Ebene dazu zu rechnen, die von mehreren Polygonzügen begrenzt sind, sei es, daß diese gewöhnliche Polygone sind (wie Fig. 10), oder Pseudopolygone und durch Projektion aus jenen entstanden (Fig. 11), schließlich auch solche die entstehen, wenn man aus dem Innern einer solchen Figur eine der vorigen Figuren herausschneidet (s. die nicht schraffierten Teile der Fig. 10 u. 11), und dann muß man sich die betr. Figur allenfalls noch von einer weiteren, ganz im Unendlichen gelegenen Linie begrenzt denken.

Auf jeder der Begrenzungslinien solcher Flächen pflegt man einen positiven Sinn festzulegen, gewöhnlich derart, daß ein Beobachter, der sich längs derselben in dieser Richtung bewegt, immer die betrachtete

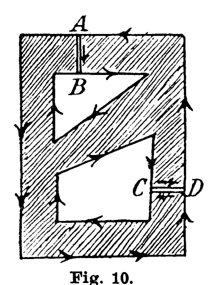
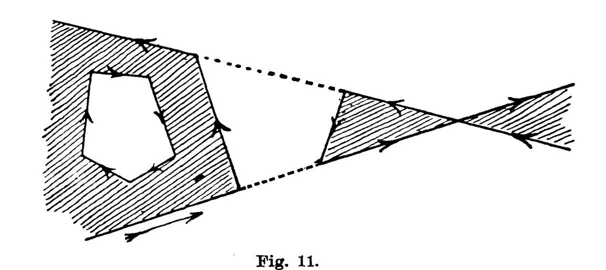


Fig. 10.


Fig. 11.

Fläche zur Linken hat. Wird die betrachtete Figur von n solcher zusammenhängender Linienzüge oder Ränder (diese können auch im Unendlichen zusammenhängen) begrenzt, so heißt sie n-fach zusammenhängend (so ist Fig. 10 dreifach, Fig. 11 zweifach zusammenhängend).

Jede Linie, die innerhalb der betrachteten Fläche gezogen zwei verschiedene Punkte der Begrenzungslinie verbindet, heißt ein Querschnitt; man betrachtet ihn gewöhnlich als aus zwei unendlich nahen parallelen Linien bestehend. Wenn man dann bei einer n-fach zusammenhängenden Fläche zwei Punkte verschiedener Ränder durch einen Querschnitt verbindet (wie AB oder CD in Fig. 10), so gehen diese in einen einzigen Rand über: die Fläche verliert einen Rand und wird $(n-1)$-fach zusammenhängend. Verfährt man ebenso mit der neuen Fläche (vgl. Fig. 10, wo der Schnitt CD geführt ist) und fährt so fort, so wird durch $n-1$ Querschnitte eine n-fach zusammenhängende Fläche in eine einfach zusammenhängende verwandelt. Diese Operation vermehrt, wenn man den Querschnitt nur als eine Gerade ansieht, die Zahl der ursprünglichen Seiten des Vielecks um $n-1$, die der Ecken um höchstens $2n-2$. Vermehrt ein Querschnitt, die Seiten um q, die Ecken um q', so ist $q' = q - 1$; führt man nämlich den Schnitt durch zwei Ecken, so be-

kommen wir keine neue Ecke, aber eine neue Seite; verbindet man eine Ecke mit einem zwischenliegenden Punkte, so erhält man eine neue Ecke, aber zwei neue Seiten; verbindet man endlich zwei zwischenliegende Punkte, so vermehrt sich die Zahl der Ecken um 2, die der Seiten um 3; es kommt nämlich der Schnitt hinzu, und jede der ursprünglichen Seiten zerfällt in zwei neue.

152. Unter einem (einfachen) Polyeder oder Vielflach, versteht man eine von n Vielecken begrenzte Figur derart, daß jedes Vieleck eine Seite mit dem benachbarten gemeinsam hat. Die Vielecke heißen die Flächen, ihre Ecken die Ecken, ihre Seiten die Kanten des Polyeders. Die Gesamtheit der Flächen heißt die Oberfläche des Polyeders; lassen wir eine oder mehrere Flächen fehlen, so entsteht eine offene polyedrische Fläche, die dann von einem ebenen oder windschiefen Vielecke begrenzt wird. Zwei in einer Kante zusammenstoßende Flächen bilden miteinander vier Flächenwinkel, von denen jedoch nur einer als der Flächenwinkel des Polyeders bezeichnet wird. Um diesen letzteren methodisch festzulegen, wenden wir ein Verfahren an ähnlich wie (in Nr. 140) bei den körperlichen Ecken. Wir nehmen auf irgend einer Fläche eine Seite als positiv und denken sie uns etwa schwarz gefärbt; wir färben alsdann auf den benachbarten Flächen die Seite welche die Fortsetzung der positiven der ersten bildet ebenfalls schwarz und fahren so fort bis alle Flächen auf einer Seite gefärbt sind. Alsdann gelten als Flächenwinkel des Polyeders nur jene, die von zwei gleichgefärbten Seiten gebildet werden. — Bei weiterer Fortsetzung dieses Verfahrens kommt man im allgemeinen auf dieselbe Seite der ersten Fläche zurück: solche Polyeder heißen zweiseitige Polyeder; es gibt aber auch solche, bei denen man auf die andere Seite derselben Fläche zurückkommt, so daß bei weiterer Fortsetzung des Verfahrens beide Seiten der sämtlichen Flächen schwarz gefärbt sein werden: solche Polyeder heißen nach Moebius einseitige.

153. Wir betrachten jetzt ein Polyeder $\mathfrak{P}$, dessen sämtliche Flächen — F an der Zahl — einfach zusammenhängende Vielecke sind; E sei die Anzahl seiner Ecken, K die der Kanten. Zwischen den Größen F, E, K besteht eine Beziehung von größter Wichtigkeit, die wir, da sie von Euler und Descartes unabhängig von einander gefunden wurde, den Descartes-Eulerschen Satz nennen wollen. Um ihn zu beweisen, denken wir uns eine Fläche des Polyeders $\mathfrak{P}$ weggenommen; dann entsteht eine offene Polyederfläche $\mathfrak{P}_1$ mit F_1 Flächen, E_1 Ecken und K_1 Kanten, und es ist offenbar

$$F_1 = F - 1, \qquad E_1 = E, \qquad K_1 = K; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

damit ist die Frage auf die Beziehung zwischen F_1, E_1, K_1 zurückgeführt. Jetzt denken wir uns von $\mathfrak{P}_1$ wieder eine an die Öffnung

stoßende Fläche weggenommen, und diese habe m freie, d. h. nicht mit den anderen Flächen gemeinsame Kanten. Dann entsteht eine neue Polyederfläche $\mathfrak{P}_2$ mit F_2 Flächen, E_2 Ecken, K_2 Kanten, und es ist

$$F_2 = F_1 - 1, \qquad E_2 = E_1 - (m-1), \qquad K_2 = K_1 - m.$$

Hieraus folgt

$$F_2 + E_2 - K_2 = F_1 + E_1 - K_1.$$

Diese Gleichung zeigt uns, daß der Wert des Trinoms $F_1 + K_1 - E_1$ nicht von der Zahl der Flächen der Oberfläche $\mathfrak{P}_1$ abhängt, also eine Zahl ist, die unverändert bleibt, wenn man von $\mathfrak{P}_1$ zu $\mathfrak{P}_2$ übergeht (also eine Invariante in bezug auf die Operation, welche von $\mathfrak{P}_1$ zu $\mathfrak{P}_2$ führt). Wiederholen wir diese Operation noch $F-2$ mal, so bleibt von $\mathfrak{P}_1$ nur noch eine einzige Fläche, die n Seiten haben möge, übrig, d. h. die restierende Oberfläche $\mathfrak{P}_{F-1}$ hat n Ecken, n Kanten, und 1 Fläche, also ist der Wert jenes Trinoms für diese gleich 1, also ist auch im allgemeinen

$$F_1 + E_1 - K_1 = 1,$$

oder

$$F_1 + E_1 = K_1 + 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Kombinieren wir nun die Gl. (1) und (2), so folgt

$$\boldsymbol{F + E = K + 2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

und das ist der Descartes-Eulersche Satz.

Es ist nun nicht schwer, eine allgemeinere Beziehung, abzuleiten für solche Polyeder bei denen nicht alle Flächen einfach zusammenhängend sind (wie Figur 12, 13). Führt man bei diesen eine gewisse Zahl q von geeigneten Querschnitten aus, so gehen alle Flächen in einfach zusammenhängende über. Dabei vermindert sich die Differenz $E - K$ um q (vgl. Nr. 151 Schluß); hat man also alle ausgeführt, so wird das Trinom $F + (E - K)$ zu $F + (E - K - q)$. Auf das nun entstehende Polyeder kann man den Eulerschen Satz anwenden, also ist

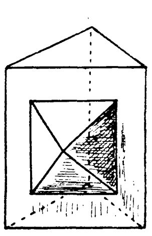


Fig. 12.

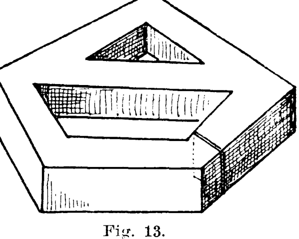


Fig. 13.

$$F + (E - K - q) = 2,$$

oder auch

$$F + E = K + 2 + q \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Dies ist die gesuchte Relation; sie kann offenbar als Verallgemeinerung von (3) angesehen werden, mit welcher sie für $q = 0$ übereinstimmt.

Zur Übung: Gegeben ein Polyeder, für welches die Gl. (3) besteht; auf k seiner Flächen werden ebensolche Polyeder aufgesetzt, indem man den gemeinsamen Flächenteil sich weggenommen denkt: man soll die Beziehung zwischen der Zahl der Flächen, Kanten und Ecken des entstandenen neuen Körpers auffinden und zeigen, daß sie mit (4) übereinstimmt.

154. Wenngleich die Anwendungen (Mineralogie und Architektur) öfters Beispiele von Polyedern bieten, die der Gl. (3) nicht genügen, so haben doch diejenigen Figuren, auf die der Descartes-Eulersche Satz anwendbar ist, die sog. Eulerschen Polyeder, für den Geometer das größte Interesse; es wird daher von Nutzen sein, wenigstens einige unmittelbare Folgerungen dieses Satzes anzuführen.

a) Wir wollen annehmen, daß unter den F Flächen des Polyeders sich F_h Flächen befinden, die konvexe Vielecke mit der Seitenzahl h seien, wo also $h = 3, 4, 5 \ldots m$, und unter den E Ecken E_k solche, in denen k Kanten zusammentreffen, wo $k = 3, 4, 5 \ldots n$. Dann ist offenbar

$$F = \sum_{h=3}^{h=m} F_h, \qquad V = \sum_{k=3}^{k=n} E_k.$$

Da nun jede Kante des Polyeders Seite zweier Flächen ist, und Verbindungslinie zweier Ecken, so können wir hinzufügen

$$2K = \sum_{h=3}^{h=m} h \cdot F_h = \sum_{k=3}^{k=n} k \cdot E_k.$$

Bezeichnen wir nun mit σ die Gesamtsumme der ebenen Winkel der ganzen Oberfläche des Polyeders und mit σ_h die Summe der Winkel einer h-seitigen Fläche, so ist zunächst

$$\sigma_h = (h-2)\pi$$

nach dem Satze über die Winkelsumme eines Vielecks, und weil

$$\sigma = \sum_{h=3}^{h=m} \sigma_h \cdot F_h,$$

so ist auch

$$\sigma = \sum_{h=3}^{h=m} (h-2)\pi \cdot F_h = \pi \cdot \sum_{h=3}^{h=m} h F_h - 2\pi \sum_{h=3}^{h=m} F_h.$$

Wegen der vorhergehenden Beziehungen kann man aber schreiben

$$\sigma = \pi \cdot 2K - 2 \cdot \pi F = 2 \cdot \pi (K - F),$$

und wegen Gl. (3)

$$\sigma = 2\pi(E-2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Diese Formel wird durch folgenden, dem eben erwähnten Satze über die Winkelsumme eines Vielecks analogen, Satz ausgedrückt: **Die**



Summe der ebenen Winkel eines Eulerschen Polyeders mit konvexen Flächen ist so oftmal vier Rechte, als die um zwei verminderte Zahl der Ecken angibt.

b) Zur Bestimmung eines Polyeders im Raume genügt offenbar die Angabe der Koordinaten seiner E Ecken, demnach sind scheinbar im ganzen $3E$ Konstanten notwendig.

Enthält jedoch eine der Flächen $h > 3$ Ecken, so kann man nur von 3 Ecken alle 3 Koordinaten beliebig geben, von den übrigen $h - 3$ sind nur zwei beliebig, da sie ja alle in einer Ebene liegen, und dies vermindert die Zahl der Konstanten, von denen das Polyeder abhängt, auf

$$3E - \sum_{h=3}^{h=m} (h-3) \cdot F_h = 3E - \sum_{h=3}^{h=m} h \cdot F_h + 3 \sum_{h=3}^{h=m} F_h,$$

oder zufolge der vorhergehenden Beziehungen

$$3E - 2K + 3F = 3(E + F) - 2K.$$

Nehmen wir nun an, daß das Polyeder ein Eulersches sei, so können wir diese Zahl auch darstellen als

$$3(K + 2) - 2K = K + 6.$$

Um daher die Gestalt und die Lage eines Eulerschen Polyeders festzulegen, sind $K + 6$ Konstanten notwendig. Um aber die Lage eines Körpers im Raume festzulegen, sind 6 Konstanten notwendig, nämlich die 3 Koordinaten eines seiner Punkte (3 Angaben) die Richtung einer durch diesen Punkt gehenden Geraden (2 Angaben) und die Stellung einer durch diese Gerade gehenden Ebene (1 Angabe). Daher hängt die Gestalt des Polyeders nur von K Konstanten ab. Damit ist folgender **Satz von Legendre** bewiesen: **Ein Eulersches Polyeder ist durch soviele Konstanten bestimmt, als die Zahl seiner Kanten beträgt.** Es ist selbstverständlich, daß diese Zahl sich vermindert, wenn das Polyeder besondere Eigentümlichkeiten, z. B. Regelmäßigkeiten, in seinem Aufbau darbietet.

155. Die am häufigsten auftretenden Polyeder sind die Pyramiden und Prismen, insbesondere die Parallelipipeda, deren Behandlung in der elementaren Geometrie einen breiten Raum einnimmt. Hier möge nur daran erinnert werden, daß eine Pyramide durch ihre Spitze und die Grundfläche, ein Prisma durch eine Grundfläche und die Seitenkante bestimmt ist.

Weniger häufig auftretend, aber theoretisch von viel größerer Wichtigkeit sind jene Eulerschen Polyeder, die von lauter kongruenten konvexen regulären Vielecken begrenzt sind und lauter kongruente Ecken haben; man nennt sie die regelmäßigen Polyeder (nicht genau zutreffend auch die Platonischen Körper). Um ihre Existenz nach-

zuweisen, wollen wir mit n die Seitenzahl einer ihrer F Flächen bezeichnen, und mit s die Zahl der in einer der E Ecken zusammenlaufenden Kanten. Da nun die Flächen mindestens dreiseitig, und jede Ecke mindestens dreiflächig ist, so ist

$$n \geqq 3, \qquad s \geqq 3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Da ferner 3 aneinanderstoßende Sechsecke keine körperliche Ecke bilden können, da ihr Winkel $\frac{2\pi}{3}$ beträgt, so ist

$$n < 6 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Ist nun wieder K die Gesamtzahl der Kanten, so ist offenbar

$$2K = n \cdot F = s \cdot E,$$

und diese Beziehung gibt im Verein mit dem Satze $F + E = K + 2$,

$$K = \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2}}, \quad F = \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2}}, \quad E = \frac{\frac{2}{s}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2}}. \quad (8)$$

Diese Beziehungen zeigen uns, daß n und s immer derart gewählt werden müssen, daß

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{s} > \frac{1}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

oder

$$(n-2)(s-2) < 4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9')$$

Es muß also eine der drei folgenden Gleichungen bestehen:

$$(n-2)(s-2) = 1, \qquad (n-2)(s-2) = 2, \qquad (n-2)(s-2) = 3.$$

Infolgedessen sind für $n-2$, $s-2$ nur die Wertepaare statthaft 1, 1; 1, 2; 2, 1; 1, 3; 3,1; setzen wir diese ein, so liefert die erste als einzige Lösung $n = 3$, $s = 3$, die zweite die beiden 3, 4 und 4, 3; die letzte die beiden 3, 5 und 5, 3. Zufolge von (8) ergeben sich dann folgende Werte für K, F, E:

K	6	12	12	30	30
F	4	8	6	20	12
E	4	6	8	12	20

Es ergibt sich demnach aus dieser einfachen Diskussion, **daß es nicht mehr als fünf reguläre konvexe Polyeder gibt**; nach der Anzahl ihrer Flächen werden sie als Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder bezeichnet. Das erstere ist in sich selbst dual (4 Flächen, 4 Ecken), das zweite (6 Fl., 8 Ecken) zum dritten (8 Fl., 6 Ecken), das vierte (12 Fl., 20 Ecken) zum fünften (20 Fl., 12 Ecken). Es möge noch hinzugefügt werden, daß man **die ganze Ebene auf drei verschiedene Arten als ein reguläres Polyeder von**

unendlich vielen Flächen auffassen kann; sie läßt sich nämlich in lauter regelmäßige Dreiecke, Vierecke und Sechsecke zerlegen.

156. Um die tatsächliche Existenz dieser Körper nachzuweisen, wenden wir die klassische, von Euklid immer in solchen Fällen angewendete Methode an, daß wir die Konstruktion in Kürze angeben, indem wir annehmen, daß für jedes die Länge der Kante k gegeben sei.

Das reguläre Tetraeder. In einer beliebigen Ebene π zeichnen wir ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seite k, errichten im Mittelpunkte O des Umkreises die Senkrechte zu π. Wo die mit k um A beschriebene Kugel die Senkrechte trifft, liegt der Punkt D; dann ist offenbar $DA = DB = DC = k$, und das Tetraeder $ABCD$ hat als Flächen 4 gleichseitige Dreiecke mit der Seite k, es ist also regelmäßig, und alle Kanten haben die gewünschte Länge.

Das reguläre Hexaeder oder der Würfel. In einer Ebene π zeichnen wir ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge k und errichten in seinen Ecken zu einer bestimmten Seite die Senkrechten zu π von der Länge k nämlich AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Ziehen wir dann noch die Geraden A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 so entsteht ein Polyeder, das offenbar von 6 kongruenten Quadraten mit der Seite k begrenzt wird, also regelmäßig ist.

Das reguläre Oktaeder. In einer beliebigen Ebene π zeichnen wir ein Quadrat $ABCD$ mit der Seite k. In seinem Mittelpunkte O errichten wir eine Senkrechte zu π und tragen auf ihr von O aus nach beiden Seiten die Stücke OE und OF ab, die an Länge gleich den Stücken OA, OB, OC, OD sind. Verbinden wir E und F mit A, B, C, D so entstehen 8 gleichseitige Dreiecke mit der Seite k, die das reguläre Tetraeder begrenzen.

Das reguläre Dodekaeder. In einer beliebigen Ebene π konstruieren wir ein regelmäßiges 5-Eck mit der Seite k, nämlich $ABCDE$ (Fig. 14). Nun legen wir durch A auf einer bestimmten Seite von π eine Gerade, die mit AB und AE ein regelmäßiges Dreiflach bildet, und tragen auf ihr eine Strecke $AA_1 = k$ ab. Dann können AB und AA_1 als zwei aufeinander folgende Seiten eines regelmäßigen Fünfecks angesehen werden. Wir ergänzen dieses und erhalten das Polygon $ABB_1P_1A_1$; ebenso konstruieren

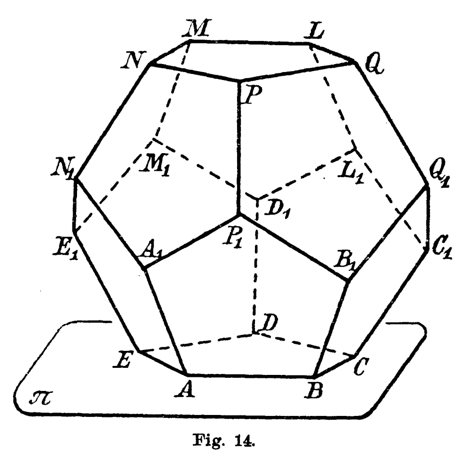


Fig. 14.

wir die Fünfecke $AEE_1N_1A_1$, und $BB_1Q_1C_1C$ das CB und BB_1 als aufeinanderfolgende Seiten hat, dann $EDD_1M_1E_1$. Schließlich beachten

wir, daß C_1CDD_1 ein Teil eines regulären Fünfecks bildet, das leicht zu ergänzen ist als $CC_1L_1D_1D$. So haben wir eine offene Polyederfläche erhalten, gebildet aus sechs regulären Fünfecken, begrenzt durch den regelmäßigen, windschiefen Linienzug $A_1P_1B_1Q_1C_1L_1D_1M_1E_1N_1$. Wir konstruieren uns nun eine zweite, ebensolche Fläche; dann können wir diese in eine solche Lage bringen, daß überall zwei Kanten jener Linienzüge zusammenfallen. Es entsteht dann ein von 12 regelmäßigen Fünfecken begrenztes Polyeder, dessen Ecken außer den genannten 15 $A, \ldots D$, $A_1 \ldots D_1$, $L_1 \ldots P_1$ noch 5 weitere hat, die Punkte $LMNPQ$, die ebenfalls ein regelmäßiges Fünfeck bilden, dessen Ebene parallel zu π ist. Das Polyeder hat als Kanten die Seiten der beiden Fünfecke $ABCDE$, $LMNPQ$, ferner die 10 Seiten des genannten regelmäßigen windschiefen Linienzuges, und schließlich die 10 Geraden $AA_1 \ldots QQ_1$; es genügt somit allen früher aufgestellten Bedingungen.

Das reguläre Ikosaeder. Auch hier zeichnen wir zunächst in einer Ebene π ein regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$ mit der Seite k und dem Mittelpunkte O. Dann errichten wir in O die Senkrechte zu π und bezeichnen mit F (s. Fig. 15) einen der Schnittpunkte dieser Senkrechten mit der um A mit dem Radius k beschriebenen Kugel. Ziehen wir nun die Geraden FA, $FB \ldots FE$, so bekommen wir im ganzen fünf kongruente gleichseitige Dreiecke mit der Seite k, die alle ihre Spitze in F haben. Betrachten wir jetzt die Geraden AB, AF, AE (die miteinander den Winkel $\frac{\pi}{3}$ bilden), so können wir durch A noch zwei andere Geraden ziehen, die mit jenen eine regelmäßige fünfseitige

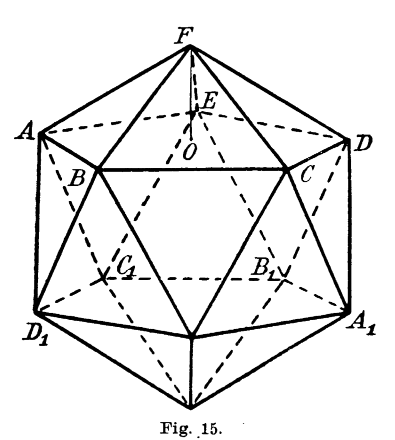


Fig. 15.

Ecke bilden, und auf ihnen nach der F entgegengesetzten Seite von π die Strecken AD_1 und $AC_1 = k$ abtragen. Dann sind, wenn wir C_1 mit D_1 und E verbinden, die Dreiecke ABD_1, AD_1C_1 und AEC_1 alle gleichseitig, und die Punkte $BFEC_1D_1$ bilden wieder ein regelmäßiges ebenes Fünfeck. Ergänzen wir in derselben Weise die Ecke E durch die Kante $EB_1 = k$ zur regelmäßig fünfseitigen Ecke und verbinden B_1 mit C_1 und D_1, so sind auch die Dreiecke EC_1B_1 und EDB_1 gleichseitig, und wir haben jetzt eine offene, polyedrische Fläche vor uns, die von dem Linienzuge $BCDB_1C_1D_1$ begrenzt ist. Konstruieren wir nun eine zweite ebensolche Fläche, so können wir diese an die vorige so anlegen, daß die begrenzenden Linienzüge sich decken, und es entsteht ein Polyeder begrenzt von 20 gleichseitigen Dreiecken mit 12 Ecken und 30 Kanten, also das, dessen Existenz bewiesen werden sollte.

157. Aus diesen regulären Polyedern, in und um welche sich eine Kugel beschreiben läßt, kann man weitere ableiten, die nicht vollkommen regulär sind, insofern zwar die Ecken kongruent sind und ihre Flächen reguläre Polygone sind, aber nicht alle von derselben Seitenzahl; es läßt sich nur **um** diese, aber nicht in diese eine Kugel beschreiben. Sie heißen die halbregulären Polyeder (des Archimedes). Man kann sie auf verschiedene Weisen erhalten, insbesondere durch ein Verfahren, das man in der Mineralogie als das Entecken der Kristalle bezeichnet.

a) Betrachten wir ein reguläres Polyeder $\mathfrak{P}$ mit seinen F Flächen, E Ecken und K Kanten; jede Fläche habe n Seiten, jede Ecke k Kanten. Verbinden wir die Mittelpunkte der aneinanderstoßenden Kanten, bzw. der Seiten einer jeden Fläche, so entsteht auf der Fläche ein ähnliches, regelmäßiges Polygon von n Seiten, während an jeder Ecke ein regelmäßiges Vieleck von k Seiten entsteht. So erhalten wir ein neues Polyeder $\mathfrak{P}_0$, das als Ecken die K Mittelpunkte der K Kanten erhält, und dessen Oberfläche aus F n-seitigen und E k-seitigen regelmäßigen Vielecken besteht. Wir haben also $F_0 = F + E$, $E_0 = K$ und daher $K_0 = F_0 + E_0 - 2 = F + E + K - 2 = 2K$. Nun sind die regulären Polyeder (abgesehen vom Tetraeder) paarweise einander dual; hat also das eine $\mathfrak{P}$ die Zahlen F, E, K, n, k, so hat das andere $\overline{\mathfrak{P}}$ entsprechend die Zahlen E, F, K, k, n; entsteht also aus $\mathfrak{P}$ in der angegebenen Weise ein Polyeder mit F n-seitigen und E k-seitigen Flächen, so entsteht aus $\overline{\mathfrak{P}}$ eines mit E k-seitigen und F n-seitigen Flächen: mit anderen Worten: Zwei duale reguläre Polyeder führen auf diese Weise zu demselben halbregulären Polyeder. — So erhalten wir: aus dem Tetraeder ein Oktaeder; aus dem Würfel oder dem Oktaeder, einen Körper, der von 6 Quadraten und 8 regelmäßigen Dreiecken begrenzt ist, das sog. Kuboktaeder; aus dem Dodekaeder oder Ikosaeder einen 32-Flächner, von 20 Dreiecken und 12 Fünfecken begrenzt (Fig. 16).

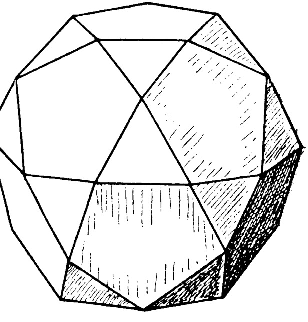
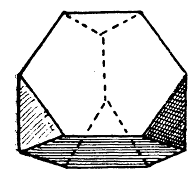
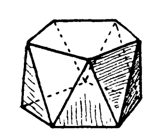


Fig. 16.

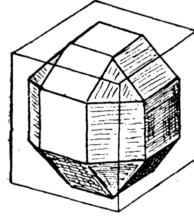
b) In ein regelmäßiges n-Eck kann man bekanntlich ein regelmäßiges $2n$-Eck so einzeichnen, daß n seiner Seiten auf die jenes fallen. Führt man das für alle Flächen des Polyeders $\mathfrak{P}$ aus, so entsteht ein zweites $\mathfrak{P}_1$ mit F $2n$-seitigen Flächen und E k-seitigen. Die Zahl seiner Flächen ist also $F_1 = F + E$, die seiner Ecken $E_1 = 2K$, also ist die der Kanten $K_1 = F_1 + E_1 - 2 = F + E + 2K - 2 = 3K$. Führt man diese Operation für: 1. ein Tetraeder aus, so erhält man einen von 4 regulären Dreiecken und 4 Sechsecken begrenzten Körper (Fig. 17); 2. beim Würfel bekommt man einen von


Fig. 17.

6 Achtecken und 8 Dreiecken begrenzten Körper; 3. aus dem Oktaeder entsteht ein von 8 Sechsecken und 6 Quadraten begrenzter Körper; 4. das aus dem Dodekaeder entstehende Polyeder hat 12 reguläre Zehnecke und 20 Dreiecke als Seitenflächen und schließlich 5. das aus dem Ikosaeder entstehende wird von 20 Sechsecken und 12 Fünfecken begrenzt.

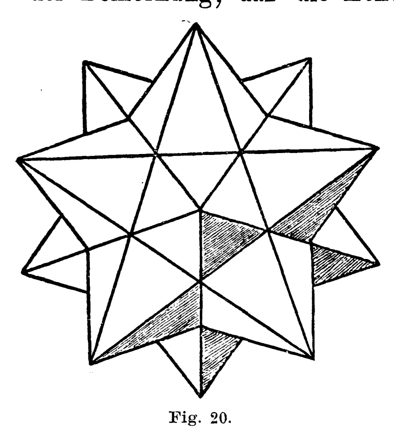

Fig. 18.

c) Zu den halbregulären Polyedern mit zweierlei Seitenflächen müssen auch die geraden regulären Prismen mit quadratischen Seitenflächen gerechnet werden, sowie die sog. Antiprismen, die entstehen, wenn man zwei reguläre n-Ecke durch einen Kranz von $2n$ gleichseitigen Dreiecken verbindet (Fig. 18).


Fig. 19.

d) Durch Entecken und Entkanten derart, daß regelmäßige Vielecke übrig bleiben bzw. auf den Schnittflächen entstehen, können aus den regelmäßigen Polyedern neue, halbreguläre gebildet werden, unter denen einige sogar dreierlei verschiedene Flächen haben. So entsteht z. B. aus dem Würfel der in Fig. 19 abgebildete 26-Flächner, dessen Oberfläche aus 8 Dreiecken und 18 Quadraten besteht.

e) Eine letzte interessante Gruppe von regulären, aber nicht konvexen Polyedern (die Keppler-Poinsotschen **Sternpolyeder**) entsteht aus der Bemerkung, daß die Ecken eines jeden regulären Polyeders zugleich Ecken eines anderen Polyeders sind[1]), das jedoch nicht konvex zu sein braucht, und in zwei oder mehrere zerlegt werden kann. Verbindet man die Ecken eines regulären Polyeders auf alle möglichen Weisen, so erhält man aus dem Würfel einen Tetraederzwilling, aus dem Dodekaeder entsteht das 20-eckige Sterndodekaeder, aus dem Ikosaeder zwei andere Arten von Sterndodekaedern und ein Sternikosaeder, die alle von Sternfünfecken begrenzt sind. Auch durch Verlängerung der Flächen oder der Kanten eines gewöhnlichen regulären Polyeders kann man die Sternpolyeder erhalten[2]), wie Fig. 20, das 32eckige Sterndodekaeder, zeigt.


Fig. 20.

1) J. Bertrand, *Note sur la théorie des polyèdres réguliers,* Comptes rendus, Bd. XLVI. 1858; vgl. auch Rouché et de Comberouse, *Traité de géométrie,* Paris 1873. II. Partie. S. 269.

2) L. A. Cauchy, *Recherches sur les polyèdres.* Journ. de l'École polyt. Bd. IX. 1811.

Drittes Kapitel.

Die Darstellung der Polyeder.

§ 1. Allgemeines.

158. Um ein Polyeder nach einer der Methoden der darstellenden Geometrie abzubilden, stellt man gewöhnlich zunächst die einzelnen Ecken dar und verbindet dann diese in der durch das Netz des gegebenen Polyeders bestimmten Reihenfolge. In besonderen Fällen wird es besser sein, von der Darstellung der Flächen auszugehen und daraus die Ecken abzuleiten, indem man die im I. Teil dargelegten Auflösungen der Fundamentalaufgaben der Geometrie der Lage anwendet. Benutzt man die Methode der Zentralprojektion, so hat man zu beachten, welche Kanten des Polyeders in Pseudostrecken (vgl. Nr. 59) übergehen, ebenso welche Flächen in Pseudopolygone übergehen.[1]) Es seien noch folgende Bemerkungen hinzugefügt, um die Zeichnungen anschaulicher zu machen.

Wir betrachten ein konvexes Polyeder $\mathfrak{P}$, einen Punkt O des Raumes außerhalb desselben, und das von ihm als Scheitel ausgehende Strahlenbündel. Von den Strahlen werden einige das Polyeder schneiden — wir wollen sie Sekanten nennen —, andere werden ganz außerhalb desselben liegen, noch andere schließlich werden gewisse Kanten streifen, und sie wollen wir Tangenten des Polyeders nennen. Jede Tangente bestimmt mit der gestreiften Kante eine Ebene, Tangentialebene des Polyeders, in bezug auf die sich das Polyeder ganz auf einer Seite befindet. Die sämtlichen durch O gehenden und $\mathfrak{P}$ berührenden Geraden bilden eine konvexe körperliche Ecke, und der Ort der Berührungspunkte besteht nun, wie leicht einzusehen, aus einer gewissen Zahl von Kanten des Polyeders; diese bilden dann einen gebrochenen Linienzug, der geschlossen ist. Man nennt ihn den Umriß des Polyeders, indem man sich in O ein Auge denkt. Unter der Voraussetzung, daß das Polyeder nicht durchsichtig ist, trennt er den von O aus sichtbaren Teil von dem unsichtbaren, oder auch den beleuchteten Teil von dem dunkelen, wenn man sich in O eine punktförmige Lichtquelle denkt.

Wird nun das Polyeder in Zentralprojektion dargestellt, so betrachtet man als sichtbar, und zeichnet daher in ausgezogenen Linien die Projektionen der Kanten, die den sichtbaren Umriß in bezug

1) Nach einigen Autoren gelten bei der Zentralprojektion die Punkte des Polyeders als sichtbar, die vor der Bildebene (d. h. im I und II Gebiete des Raumes) liegen, während bei der Mongeschen Methode für die erste (zweite) Projektion diejenigen als sichtbar gelten, die in dem I u. II (I u. IV) der vier Gebiete liegen, in die der Raum durch die Projektionsebenen geteilt wird. Es ist aber besser, nach unserer Meinung, die Projektionsebene als durchsichtig zu betrachten.



auf das Projektionszentrum bilden, ebenso die Projektionen aller anderen sichtbaren Kanten; dagegen punktiert und gestrichelt die aller übrigen Kanten. Bei der Mongeschen Methode verfährt man ähnlich; man hat dabei zwei Umrisse zu betrachten, den einen in bezug auf ein im Zenit der Grundrißebene, den anderen in bezug auf ein im Zenit der Aufrißebene befindliches Auge. Bei jeglicher Darstellungsmethode ist wichtig zu beachten:

1. Der Umriß des Polyeders ist stets ganz sichtbar.

2. Eine Fläche, die einen sichtbaren Punkt enthält, ist ganz sichtbar, ausgenommen der Fall, daß jener Punkt dem Umrisse angehört.

3. Eine Fläche, die einen unsichtbaren Punkt enthält, ist ganz unsichtbar, ausgenommen eventuell einige Seiten, die dem Umrisse angehören.

4. Eine Kante, die einen sichtbaren Punkt enthält, ausgenommen, wenn er dem Umrisse angehört, ist vollkommen sichtbar.

5. Eine Kante, die einen unsichtbaren Punkt enthält, ist ganz unsichtbar, ausgenommen etwa den Endpunkt, der dem Umrisse angehört.

6. Von zwei Polyederflächen, die eine Kante gemeinsam haben, welche ein Teil des Umrisses ist, ist die eine sichtbar und die andere unsichtbar.

7. Zwei Polyederflächen, die eine Kante gemeinsam haben, die nicht ein Teil des Umrisses ist, sind beide sichtbar oder beide unsichtbar.

8. Zwei durch denselben Eckpunkt des Polyeders gehende Kanten sind beide sichtbar oder unsichtbar, wenn jener Eckpunkt dem Umrisse nicht angehört.

9. Von zwei Punkten, die ihre Projektion gemeinsam haben, ist nur einer sichtbar.

§ 2. Pyramiden und Prismen.

159. Wir schicken folgende einfache Bemerkungen voraus. Es seien σ_1 und σ_2 zwei ebene perspektive (im speziellen auch homologische) Systeme mit dem Zentrum O und der Achse s. Zwei beliebige entsprechende Punkte P_1 und P_2 liegen dann mit O in gerader Linie, und zwei entsprechende Geraden g_1 und g_2 schneiden sich auf s. Wir denken uns nun diese beiden Systeme von einem beliebigen Punkte C aus auf eine Ebene π projiziert, und die so enthaltenen Projektionen durch Strichel bezeichnet. Dann entstehen auf π zwei zueinander projektive Systeme σ_1' und σ_2' auf dem gemeinsamen Träger π. Zwei beliebige einander entsprechende Punkte P_1', P_2' derselben liegen dann in gerader Linie mit O', der Projektion von O, während zwei einander entsprechende Geraden sich auf s' schneiden; das zeigt uns, daß σ_1' und σ_2' zwei homologische ebene Systeme sind mit dem Zentrum O' und der Achse s'. Folglich: **Zwei ebene per-**

spektivische Systeme liefern als Projektion zwei homologische Systeme mit den Projektionen des Zentrums und der Achse als Zentrum und Achse. Will man denjenigen Punkt P_2' von σ_2' finden, der dem Punkte P_1' von σ_1' entspricht, so verfährt man folgendermaßen: Man projiziere P_1' von O aus als P_1 auf den Träger von σ_1 und bestimme P_2, den P_1 in σ_2 entsprechenden Punkt betrachtet als zugehörig dem System σ_1; die Projektion von P_2 von C aus auf π gibt den Punkt P_2'. Ähnlich verfährt man, wenn man die der Geraden g_1' in σ_2' entsprechende Gerade g_2' konstruieren will. Soll z. B. die Grenzgerade von σ_2' konstruiert werden, so legen wir durch O die zu π parallele Ebene und bestimmen ihren Schnitt mit der Ebene der Systeme σ_1; von dieser Geraden suchen wir die entsprechende in σ_2; ihre Projektion von O aus auf π ist die gesuchte Gerade.

160. Eine Pyramide wird gewöhnlich durch ihre Spitze V und das Polygon der Grundfläche $P_1 P_2 \ldots P_n$ bestimmt. Bei Anwendung der Mongeschen Methode ist die Spitze durch ihre Projektionen V', V'' bestimmt, die Grundfläche durch die Spurlinien s_1, s_2 ihrer Ebene und die Horizontal- (oder Vertikal-) Projektion, oder durch die beiden Projektionen dreier Ecken und eine der übrigen Ecken. In beiden Fällen kann man nach einem bekannten Verfahren (vgl. Nr. 17, 26) die Darstellung der Grundfläche und damit die der ganzen Pyramide vervollständigen. — In besonderen Fällen können die Daten in anderer Weise gegeben sein: so z. B. wird eine gerade reguläre n-seitige Pyramide schon durch ihre Spitze S, eine Ecke P_1 der Grundfläche und deren Ebene bestimmt sein.

Zur Übung: I. Die Darstellung einer in der obigen Weise gegebenen regulären Pyramide auszuführen [indem man eine Umlegung der Ebene der Grundfläche benutzt].

II. Eine Pyramide darzustellen, die zur Grundfläche ein regelmäßiges n-Eck hat, wenn man die Spitze $V \equiv (V', V'')$ kennt, den Mittelpunkt $O \equiv (O', O'')$ der Grundfläche und die Horizontalprojektion einer seiner Ecken.

III. Eine Pyramide darzustellen, die als Grundfläche ein in der Grundrißebene gegebenes Dreieck ABC hat, und von der man die Längen der Seitenkanten VA, VB, VC kennt. (Man lege die Seitenflächen in die Grundrißebene um.)

IV. Dieselbe Aufgabe zu lösen für den Fall, daß ABC in einer Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$ liegt, und durch seine Horizontalprojektion gegeben ist. [Durch Umlegung von τ in die Grundrißebene.]

Benutzt man hingegen die Zentralprojektion, so muß für die Pyramide gegeben sein: 1. die Spitze als $V \equiv (TI', V')$ oder als $V \equiv (ti', V')$; 2. die Grundfläche als $\tau_0 \equiv [t_0 i_0']$; 3. die Projektionen $P_1', P_2', \ldots P_n'$ ihrer Ecken. Dann haben die Grundkanten zur Projektion die Geraden $P_k' P'_{k+1}$ und als Darstellungselemente die Schnitte dieser mit t_0 und i_0'. Die Seitenkanten haben als Projektionen die Geraden $V' P_k'$ und ihre Darstellungselemente $T_k I_k'$ werden

erhalten durch Anwendung der I. Grundaufgabe der Lage (s. Nr. 64 und 66). Sind nun die Elemente einer dieser Kanten z. B. VP_1 bestimmt, so kann man mit Anwendung des in Nr. 159 Gesagten, die der anderen daraus ableiten. Es sind nämlich die ebenen Figuren $T_1 T_2 \ldots T_n$ und $I_1 I_2 \ldots I_n$ beide perspektiv mit $P_1 P_2 \ldots P_n$, indem für beide V das Perspektivitätszentrum ist, und Perspektivitätsachse das eine Mal, die Spurlinie, das andere Mal die unendlich ferne Gerade von τ_0. Dies zeigt uns: 1. die beiden Figuren $T_1 T_2 \ldots T_n$ und $P_1' P_2' \ldots P_n'$ entsprechen sich in einer Homologie mit dem Zentrum V' und der Achse t_0. 2. Die Figuren $I_1' I_2' \ldots I_n'$ und $P_1' P_2' \ldots P_n'$ entsprechen sich in einer Homologie mit dem Zentrum V' und der Achse i_0'; beide Homologien sind durch je ein Paar entsprechender Elemente bestimmt, sobald die Kante VP_1 vollständig dargestellt ist.

Zur Übung: I. Die in der vorigen Übung bestimmten Pyramiden in Zentralprojektion darzustellen.

II. Dieselben Aufgaben nach der Methode der kotierten Ebenen zu lösen.

161. Ein Prisma wird gewöhnlich bestimmt durch eine seiner Grundflächen $M_1 M_2 \ldots M_n$ und eine Ecke der anderen Grundfläche $N_1 N_2 \ldots N_n$, die einer bestimmten Ecke der ersteren entspricht. Um nun die erste Grundfläche festzulegen, im Falle daß die Mongesche Methode angewandt wird, können wir etwa die Spuren ihrer Ebene t_1, t_2 geben und die ersten Projektionen ihrer Ecken; von der anderen Ecke, etwa N_1, können wir beide Projektionen geben. Aus diesen Angaben läßt sich (nach Nr. 17) die zweite Projektion der Grundfläche darstellen; $M_1' N_1'$ und $M_1'' N_1''$ stellen dann eine Seitenkante des Prismas dar, die übrigen erhält man, wenn man durch M_2', $M_3' \ldots M_n'$ die mit $M_1' N_1'$, und durch M_2'', $M_3'' \ldots M_n''$ die zu $M_1'' N_1''$ äquipollenten Strecken zeichnet; die noch fehlenden Kanten sind damit sofort gegeben. Man beachte, daß besagte Konstruktion eine Kontrolle bietet, indem N_k' und N_k'' $(k = 2, 3, 4 \ldots n)$ auf derselben Ordinate liegen müssen.

Zur Übung: Ein gerades regulär n-seitiges Prisma darzustellen, dessen Achse gegeben ist, eine Ecke und die gemeinsame Länge der Seitenkanten. [Durch Umlegung erhält man die die gegebene Ecke enthaltende Grundfläche; um die andere zu bekommen, wende man die Aufg. I Nr. 31 und die Aufg. II Nr. 37 usw. an.]

Wendet man aber Zentralprojektion an, so ist folgende die beste Art, ein Prisma zu bestimmen: Man gebe die Ebene $\tau \equiv [t\, i']$ einer der Grundflächen, ihre Projektion $M_1' M_2' \ldots M_n'$, den gemeinsamen Fluchtpunkt I' der Seitenkanten und schließlich auf der Geraden $I' M_1'$ die Projektion N_1' der Ecke der anderen Grundfläche die M_1 entspricht, dadurch ist der Körper offenbar vollständig bestimmt. Von der Seitenkante $M_1 N_1$ kennt man den Fluchtpunkt I', und der Spurpunkt T_1 läßt sich (nach Nr. 66) leicht finden. Um die

Spurpunkte der übrigen Kanten zu finden, beachte man, daß die beiden Vielecke $M_1 M_2 \dots M_n$ und $T_1 T_2 \dots T_n$ perspektiv in bezug auf das Zentrum I sind, daher sind ihre Projektionen (vgl. Nr. 159) $M_1' M_2' \dots M_n'$ und $T_1 T_2 \dots T_n$ homologisch in bezug auf das Zentrum I' und die Achse t; da nun schon ein Paar entsprechender Punkte, M_1', T_1 und die Ebene der beiden Vielecke bekannt ist, so läßt sich das zweite konstruieren. — Ebenso sind die beiden Vielecke $M_1 M_2 \dots M_n$ und $N_1 N_2 \dots N_n$ perspektiv in bezug auf das Zentrum I und die unendlich ferne Gerade i, die beiden Ebenen gemeinsam ist, als Achse; daher entsprechen sich die beiden Vielecke $M_1' M_2' \dots M_n'$ und $N_1' N_2' \dots N_n'$ in einer Homologie mit dem Zentrum I' und der Achse i'. Da nun eins derselben bekannt ist und eine Ecke des anderen, so läßt sich letzteres vollständig zeichnen. Alsdann läßt sich die Darstellung des Prismas leicht vervollständigen.

Zur Übung: Das in der vorigen Übung bezeichnete Prisma in Zentralprojektion darzustellen.

Bei Anwendung der Methode der kotierten Ebenen verfährt man folgendermaßen. Ist die Projektion $M_1' M_2' \dots M_r'$ der Grundfläche und die Neigungsskale ihrer Ebene gegeben, so bestimme man nach dem in Bd. I Nr. 95 gegebenen Verfahren die Koten m_1, $m_2, \dots m_r$ der Ecken. Ist dann $N_1 \equiv (N_1', n_1)$ als die dem M_1 entsprechende Ecke der Deckfläche gegeben, so ziehe man durch $M_2' M_3' \dots M_r'$ Strecken gleich und gleich gerichtet mit $M_1' N_1'$, ihre Endpunkte bilden dann die Projektion der Deckfläche. Die Koten ihrer Ecken n_2, $n_3 \dots n_r$ bekommt man aus der Beziehung

$$n_1 - m_1 = n_2 - m_2 = \cdots = n_r - m_r.$$

Zur Übung: Das vorhin bezeichnete Prisma in der Methode der kotierten Ebenen darzustellen.

Die Art der Bestimmung eines Prismas, wie sie im vorigen benutzt wurde, kann durch unzählige andere ersetzt werden, die je nach den Umständen mehr oder weniger wertvoll sein können. Dazu gesellen sich noch andere, wenn es sich um spezielle Polyeder handelt. Bemerkenswert ist jene, die in dem folgenden Porisma enthalten ist:

Sind drei beliebige Geraden a, b, c gegeben, die alle zueinander windschief sind, so gibt es immer ein einziges Parallelipiped, bei dem jene Geraden (der Lage nach) **drei unabhängige** (d. h. weder parallele noch zusammenlaufende) **Kanten sind**; man soll dieses konstruieren und darstellen.

Auflösung: Durch a legen wir die zu b und c parallelen Ebenen β_1 und γ_1, ebenso durch b die zu c und a parallelen Ebenen γ_2 und α_2 schließlich durch c die Ebenen α_3, β_3 parallel zu a, b. Somit haben wir im ganzen sechs Ebenen, die zu je zwei und zwei einander



parallel sind; sie begrenzen das Parallelipiped, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Um die Darstellung nach der Mongeschen Methode auszuführen, nehmen wir an, daß die drei Geraden als $a \equiv (a', a'')$, $b \equiv (b', b'')$, $c \equiv (c', c'')$ gegeben seien (s, Fig. 21). Durch einen beliebigen Punkt $A \equiv (A', A'')$ von a ziehen wir die Geraden b_1, c_1 parallel zu b, c; die Ebenen ab_1 und ac_1 werden dann die Ebenen zweier Flächen des gesuchten Parallelipipeds sein. Die Punkte B und C, in denen die Geraden b und c die Ebenen ac_1 und ab_1 treffen, sind zwei Ecken des gesuchten Polyeders; ihre Projektionen lassen sich ohne Benutzung der Spuren jener Ebenen (nach Nr. 24 Bd. I, S. 20) finden. Die durch C zu b und durch B zu c gezogenen Parallelen schneiden a in zwei anderen Ecken D und E des Polyeders. Wir ergänzen nun die Parallelogramme $BEDF$, $CDFK$, $CDEG$, $GCKH$ und haben dann die übrigen Ecken in beiden Projektionen. Der Leser beachte die vielen Bestätigungen, die diese Konstruktion bietet.

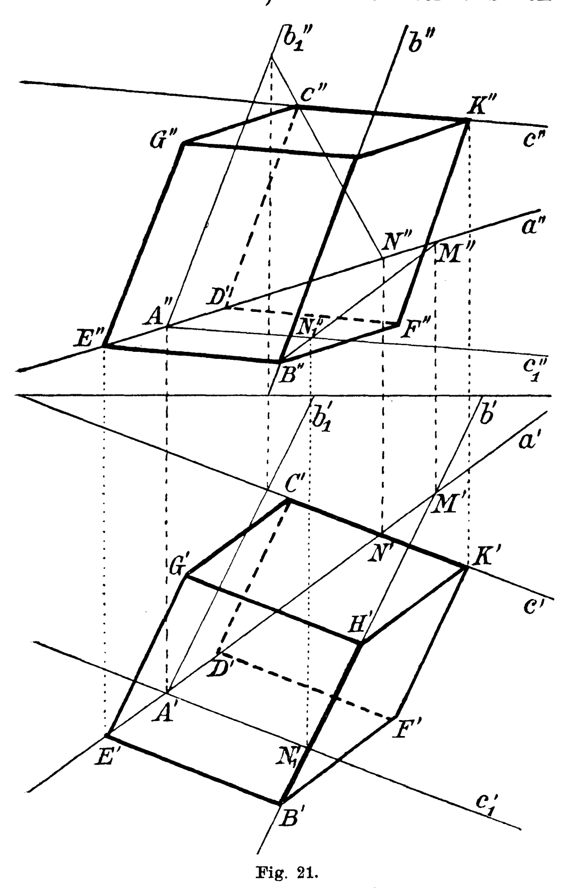


Fig. 21.

Zur Übung: I. Dieselbe Aufgabe mit Anwendung der Zentralprojektion zu lösen.

II. Als Obelisk bezeichnet man ein Polyeder, das zwei Endflächen $A_1 A_2 \ldots A_n$ und $B_1 B_2 \ldots B_n$ mit einander parallelen Seiten (von denen einige auch gleich Null sein können) hat und $A_1 B_1$, $A_2 B_2 \ldots A_n B_n$ als Seitenkanten. Ein solches soll nach den bekannten Methoden dargestellt werden.

III. Einen Parallelkantner nennt H. Schubert ein Polyeder, das entsteht, wenn man ein Prisma durch eine zur Grundfläche schiefe Ebene abschneidet. Die Darstellung eines solchen zu finden, wenn man die eine Grundfläche $A_1 A_2 \ldots A_n$ kennt und von der anderen Fläche die Ecken $B_1 B_2 B_3$, derart daß $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ einander parallel sind.

§ 3. Die regulären Polyeder.

162. Ist über die Lage eines Polyeders in bezug auf die Bildebenen **keine** Bestimmung getroffen, so kann man sie so wählen, daß

seine Projektionen von möglichst größter Einfachheit werden; so kann man z. B. das Polyeder mit einer seiner Flächen auf die Grundrißebene legen, so daß diese mit ihrem Grundriß zusammenfällt und der Aufriß in die Grundlinie fällt. Hat das Polyeder mehrere einander parallele Kanten, so kann man beide Projektionsebenen oder wenigstens eine so wählen, daß sie zu jenen Kanten parallel läuft; hat es eine Symmetrieebene, so kann man diese oder eine dazu parallele Ebene als Bildebene nehmen und wenn es eine Symmetrieachse hat, so kann man diese auf eine Bildebene senkrecht stellen. Von diesen Vorteilen werden wir Anwendung machen, um von den fünf regulären Polyedern ausdrucksvolle Darstellungen nach der Mongeschen Methode zu erhalten; durch Anwendung der im I. Teile dargelegten Weisen (I. Buch, Kap. 11; II. B. K. 6 u. 7; IV. B. K. 1) können wir dann die Abbildungen auf andere Ebenen oder nach anderen Darstellungsmethoden daraus leicht erhalten.

Das reguläre Tetraeder. Es sei l die Kantenlänge des regulären Tetraeders $ABCD$. Wir legen die Fläche ABC auf die Grundrißebene (s. Fig. 22), dann fallen A', B', C' mit A, B, C zusammen und bilden ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite l, und A'', B'', C'' fallen auf die Grundlinie. Die Horizontalprojektion D' der Spitze D fällt auf den Mittelpunkt O des Umkreises des Dreiecks ABC. Zieht man dann $D'A'$, $D'B'$, $D'C'$, so ist der Grundriß fertig. Für den Aufriß hat man nur noch D'' nötig, und hierzu genügt es, die Kote von D zu kennen. Legen wir jetzt das rechtwinklige Dreieck DOA in die Grundrißebene um, es um OA drehend, so kommt D in einen Punkt der in O zu OA errichteten Senkrechten zu liegen, derart daß $\overline{A(D)} = l$ wird; $\overline{O(D)}$ ist dann die gesuchte Kote. Tragen wir diese auf der Ordinate $D'D_{12}$ von D_{12} aus ab, so erhalten wir D'', welchen Punkt wir mit A'', B'', C'' verbinden um den Aufriß zu erhalten.

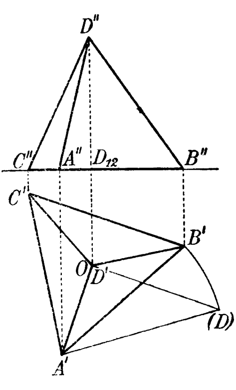


Fig. 22.

Anmerkung: Im regulären Tetraeder fallen der Mittelpunkt der einbeschriebenen und der der umbeschriebenen Kugel mit dem Schwerpunkte G zusammen. Dieser liegt auf einer Höhe, etwa OD, in ein Viertel Abstand von der Grundfläche. Teilen wir also $O(D)$ in 4 gleiche Teile und nehmen den ersten Teilpunkt von O aus, so erhalten wir (G). Hieraus folgt, daß die Strecken $\overline{(G)O}$ und $\overline{(G)(D)}$ die Radien der dem Tetraeder ein- bzw. umbeschriebenen Kugel sind.

Bezeichnen wir den Umkreisradius des Dreiecks ABC mit r, so ist $r = \frac{l}{\sqrt{3}}$; ferner folgt aus der Fig. 22, daß

$$\overline{(D)D'}^2 = \overline{A'(D)}^2 - \overline{A'D'}^2 = l^2 - r^2 = 3r^2 - r^2 = 2r^2,$$

und daher ist

$$\overline{(D)D'} = r\sqrt{2};$$

folglich ist die **erste Kote der Ecke D gleich der Seite des in den Umkreis der Tetraederfläche beschriebenen Quadrates.**

Zur Übung: I. Projiziert man ein reguläres Tetraeder orthogonal auf eine Ebene, die zur Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenkanten senkrecht steht, so erhält man ein Quadrat mit seinen Diagonalen. — **II.** Ein reguläres Tetraeder in Zentralprojektion darzustellen, wenn man die Ebene einer Fläche und zwei Ecken auf ihr kennt. (Man benutze die Umlegung der gegebenen Ebene und wende die Lösung der Fundamentalaufgaben an.)

163. Das reguläre Hexaeder oder der Würfel. Es seien $ABCD$ und $EFGH$ zwei gegenüberliegende Würfelflächen mit der Seite l. Wir legen die erste parallel zur Grundrißebene, dann erhalten wir in dieser ein Quadrat $A'B'C'D'$ mit der Seite l (s. Fig. 23) und seine Ecken fallen mit den Projektionen der Ecken der zweiten Fläche $E'F'G'H'$ zusammen, es braucht also für den Grundriß nichts hinzugefügt zu werden. Die Punkte $A''B''C''D''$ liegen auf einer zur Achse parallelen Geraden (die übrigens beliebig ist) und da die Strecken AE, $BF\ldots$ senkrecht laufen, so projizieren sie sich in wahrer Größe l, und daher kommen die Punkte E'', F'', G'', H'' auf einer zu $A''B''$ im Abstande l gezogenen Parallelen zu liegen. Zieht man also die Ordinaten der Punkte $A' \equiv E'$, $B' \equiv F'\ldots$ so ist der Aufriß vollständig.

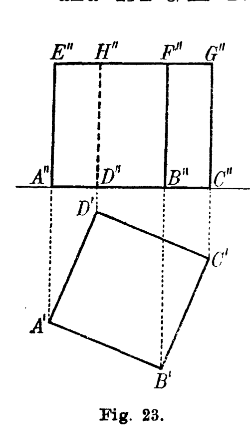


Fig. 23.

Anmerkung: Die Radien der dem Würfel ein- und umbeschriebenen Kugel sind gleich der halben Kante, bzw. gleich der halben Würfeldiagonale $\overline{AG}$.

Zur Übung: I. In Grund- und Aufriß einen Würfel abzubilden, von dem man die Ebene einer Seitenfläche kennt, und zwei aufeinander folgende oder gegenüberliegende Ecken. — **II.** Dieselbe Aufgabe für Zentralprojektion zu lösen (vgl. Nr. 161). — **III.** Die Ecken eines Würfels sind die Ecken zweier regulärer Tetraeder; deren Darstellung aus der Würfelabbildung abzuleiten. — **IV.** Gegeben ein rechtwinkliges Dreikant Ox, Oy, Oz; gesucht ein reguläres Tetraeder $OABC$, dessen Ecken A, B, C bzw. in den Ebenen yOz, zOx, xOy liegen. — **V.** Projiziert man den Würfel auf eine zur Diagonale senkrechte Ebene, so erhält man ein regelmäßiges Sechseck mit den Umkreisradien. Warum?

Das reguläre Oktaeder. Es sei $ABCDEF$ ein reguläres Oktaeder mit der Kante l. Wir bringen es in eine solche Lage, daß die Ecken A, B, C, D sich in einer horizontalen Ebene befinden und demnach EF vertikal steht. A', B', C', D' sind dann die Ecken eines Quadrates mit der Seite l, und die Punkte E' und F' fallen mit dem Mittelpunkte O des Quadrates zusammen; die Verbindungs-

linien dieser Punkte bilden also den Grundriß (s. Fig. 24). — Im Aufriß liegen A'', B'', C'', D'' in einer (beliebigen) zur Grundlinie parallelen Geraden. Da nun $\overline{OE} = \overline{OF} = \overline{OA}$ und OE parallel zur Aufrißebene ist, so wird $\overline{O''E''} = \overline{O''F''} = \overline{OA} = \overline{O'A'}$, da OA parallel zur Grundrißebene ist. Man hat also nur von O'', welches auf $A''B''$ liegt auf der zugehörigen Ordinate nach beiden Seiten $O'A'$, die halbe Quadratdiagonale, abzutragen um E'' und F'' zu erhalten. Verbinden wir alle Punkte mit einander so haben wir den Aufriß.

Fig. 24.

Zur Übung: I. Projiziert man das Oktaeder orthogonal auf eine zu einer Seitenfläche parallele Ebene, so erhält man ein reguläres Sechseck mit den Diagonalen, die eine Ecke überschlagen (s. Fig. 37). — **II.** Die Abbildung des Oktaeders aus der des Würfels (Fig. 23) abzuleiten mit Benutzung des Umstandes, daß die Mittelpunkte der Würfelflächen die Ecken eines Oktaeders sind. — **III.** Nach der Mongeschen oder in Zentralprojektion das Oktaeder darzustellen, wenn man die Ebene des Quadrates $ABCD$ kennt und zwei aneinander stoßende (oder gegenüberliegende) Ecken desselben. (Durch Umlegung.)

164. Das reguläre Dodekaeder. Wir behalten die in Nr. 156 und Fig. 14 angewandte Bezeichnung bei und legen das Polyeder mit der Fläche $ABCDE$ auf die Grundrißebene π_1; dann befindet sich die gegenüberliegende Fläche $LMNPQ$ in einer dazu parallelen Ebene σ_1, die Ecken $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ in einer dritten, $L_1 M_1 N_1 P_1 Q_1$ in einer vierten ebenfalls parallelen Ebene, die wir π bzw. σ nennen. Dann haben die Ebenen π und π_1, sowie σ und σ_1 aus Gründen der Symmetrie denselben Abstand, den wir mit x bezeichnen wollen; den Abstand zwischen π und σ dagegen wollen wir mit y bezeichnen. — In der π_1 zeichnen wir zunächst das regelmäßige Fünfeck $ABCDE$ aus der Kante l des Dodekaeders. Um dieses beschreiben wir den Kreis, dessen Radius r sein möge. Die den Punkten A, B, C, D, E diametral gegenüberliegenden Punkte dieses Kreises sind dann die ersten Projektionen der Ecken L, M, N, P, Q, weshalb das Fünfeck $L'M'N'P'Q'$ (s. Fig. 25) die Projektion der $ABCDE$ gegenüberliegenden Fläche ist. Um die übrigen Ecken im Grundriß zu bekommen, betrachten wir zwei andere, ebenso gegenüberliegende Flächen, etwa $ABB_1 P_1 A_1$ und $LMM_1 D_1 L_1$. Ihre Diagonalen $A_1 B_1$ und $M_1 L_1$ sind mit den Seiten AB und ML, aber auch mit den Diagonalen EC und NQ parallel; demnach sind sie sowohl untereinander als auch mit π_1 parallel, projizieren sich also in wahrer Länge. Die Endpunkte der genannten 4 Diagonalen liegen aber symmetrisch zur Ebene $DD'O$, also in zwei zu π_1 senkrechten Ebenen, also projizieren sie sich auf die Geraden EN' und CQ'; auf diesen liegen also auch A_1', M_1' und

B_1', L_1'. Es ist klar, daß ferner $A_1' \dots L_1'$ auf der Verlängerung der Radien $O'A, \dots, O'L'$ liegen müssen, also nun leicht zu finden sind. In gleicher Weise findet man die übrigen Ecken[1]), oder was bequemer ist: Wird nun mit OA_1' um O ein Kreis beschrieben, so liefern die Verlängerungen der Radien $OB, OC, \dots QQ'$ die übrigen Ecken $B_1', C_1' \dots Q_1'$ auf diesem Kreise liegend. In geeigneter Weise verbunden liefern sie den Grunriß des Dodekaeders.

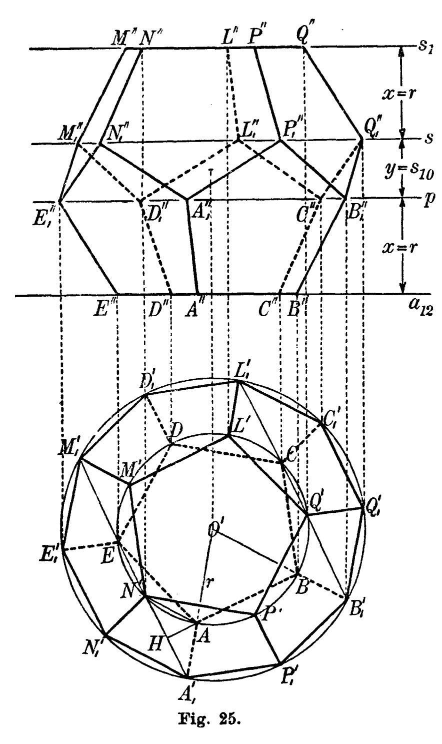


Fig. 25.

Was den Aufriß betrifft, so liegen zunächst A'', B'', C'', D'', E'' auf der Achse a_{12}, sind also leicht zu finden. A_1'', $\dots E_1''$ liegen auf einer zu a_{12} parallelen im Abstande x gezogenen Geraden p, $L''_1 M_1'' \dots Q''_1$ auf einer zu p parallelen Geraden s im Abstande y von p und schließlich L'', M'', $\dots Q''$ auf einer Geraden s_1, die von s wieder den Abstand x hat. Wenn wir diese Abstände kennen, sind die Punkte leicht zu finden. x ist nun nichts anderes, als die Kote des Punktes A_1', also die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse $AA_1 = l$, dessen andere Kathete AA_1' ist, also ist

$$x^2 = l^2 - \overline{AA_1'}^2.$$

$AA_1' = AN'$ (wegen der Kongruenz der Dreiecke $AA'H$ und $AN'H$) ist also gleich der Zehneckseite in dem Kreise mit dem Radius r; l ist die Fünfeckseite in demselben Kreise. Nun bilden aber, nach einem Satze von Euklid (Elemente XIII. Buch, Satz X), die Zehneckseite, Sechseckseite und Fünfeckseite ein rechtwinkliges Dreieck, $s_{10}^2 + s_6^2 = s_5^2$, also ist x die Sechseckseite d. h. der Radius OA; wir haben demnach

$$x = r. \qquad \dots\dots\dots \qquad (1)$$

Ebenso kennt man von der Strecke $A_1 N_1$ die wahre Länge l und ihre Projektion $A_1' N_1'$. Erstere ist nun die Fünfeckseite, letztere

1) Ist also der mit r beschriebene Kreis in 10 gleiche Teile geteilt, so kann der Grundriß mit alleiniger Hilfe des Lineals gezeichnet werden. Diese Vereinfachung, sowie die folgende fand Fr. Schütte (*Anfangsgründe d. darst. Geom.* Leipzig 1905).

gleich dem Radius $O'B$ des um O' mit r beschriebenen Kreises, denn die Figur $A_1'BO'N_1'$ ist ein Parallelogramm. Da nun

$$y^2 = l^2 - \overline{A_1'N_1'}^2 = l^2 - r^2,$$

so folgt aus dem obigen Satze, daß y die Zehneckseite in diesem Kreise ist,

$$y = s_{10}. \qquad (2)$$

Entnehmen wir also aus dem Grundriß die Abstände der Geraden p, s, s_1, so finden wir leicht den Aufriß, wie ihn die Figur zeigt. Zur Kontrolle dient, daß allemal fünf Kanten, die auf die Ecken derselben Fläche zulaufen, sich in einem Punkte schneiden müssen.

Die Radien der um- und einbeschriebenen Kugel kann man nun leicht in ihrer wahren Länge zeichnen, da man ihre beiden Projektionen sofort erhalten kann: O'' liegt in der Mitte zwischen p und s.

Zur Übung: Die Gleichungen (1), (2) aus der Figur trigonometrisch abzuleiten.

165. Das reguläre Ikosaeder. Wir behalten auch hier die in Nr. 156 und Fig. 15 (S. 24) gemachten Bezeichnungen bei und nehmen die Grundrißebene parallel zu jenen beiden Ebenen σ und σ_1, in denen die Fünfecke $ABCDE$ und $A_1B_1C_1D_1E_1$ lagen, also senkrecht zu der Geraden, die die beiden Ecken F und F_1 verbindet. Es ist klar, daß der Abstand des Punktes F von σ, den wir x nennen, ebensogroß ist wie der des Punktes F_1 von σ_1. Den Abstand zwischen σ und σ_1 nennen wir y.

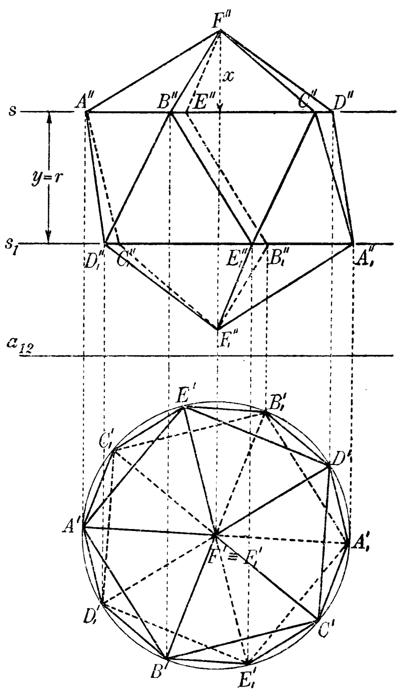


Fig. 26.

Infolge der obigen Annahmen projiziert sich das erste Fünfeck im Grundriß in seiner wahren Größe, wenn wir also aus der Kante l des Polyeders ein regelmäßiges Fünfeck zeichnen, so dürfen wir dies mit $A'B'C'D'E'$ bezeichnen (Fig. 26). Beschreiben wir um dieses den Kreis, dessen Radius r sein möge, und bezeichnen auf diesem die A', B' ... diametral gegenüberliegenden Punkte mit A_1', B_1'..., so sind diese die Projektionen der Ecken des anderen Fünfecks $A_1B_1C_1D_1E_1$, dagegen fallen F' und F_1' mit dem Mittelpunkte des Kreises zusammen. Somit haben wir alle Ecken im Grundriß, und können somit die Projektion des Polyeders selbst leicht zeichnen.

Im Aufriß können wir zunächst den Punkt F_1'' beliebig auf der Ordinate von F' wählen; $A_1'' \ldots E_1''$ liegen dann auf einer zu a parallelen Geraden s_1 im Abstande x von E_1''; $A'' \ldots E''$ liegen auf einer Geraden s, die von s den Abstand y hat; schließlich liegt F'' auf der Ordinate von F' im Abstande x von s. — Um zunächst x zu bestimmen, betrachten wir etwa die Kante $F_1 A_1$. Ihre wahre Länge ist l, die Seite des Fünfecks, ihre Projektion $F_1' A_1'$ ist der Radius; also ist die Kote von A_1 die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Kathete der Radius, dessen Hypotenuse die Fünfeckseite ist. Nach dem vorhin zitierten Satze muß also x die Zehneckseite in demselben Kreise sein, also

$$x = \overline{A' C_1'}. \qquad (3)$$

Um y zu finden, betrachten wir etwa die Kante $A_1 D$. Ihre wahre Länge ist wieder l, die Fünfeckseite, ihre Projektion ist $A_1' D'$, also die Zehneckseite, also ist die Differenz der Koten von A_1 und D wiederum nach dem obigen Satze, die Sechseckseite, d. i. der Radius r.

$$y = r \quad (= \overline{OA'}). \qquad (4)$$

Wir können also aus dem Grundriß direkt die Abstände der Geraden s_1 und s von F_1'' entnehmen, und durch Ziehen der Ordinaten, die Ecken und damit das ganze Polyeder im Aufriß erhalten.

Bemerkung. Der Radius der dem Polyeder umschriebenen Kugel ist offenbar gleich der Hälfte von $F'' F_1''$; der der einbeschriebenen Kugel läßt sich aus den Projektionen ebenfalls leicht konstruieren. Die einbeschriebene Kugel berührt nämlich die Flächen in deren Schwerpunkt, und da der Schwerpunkt einer Fläche durch Parallelprojektion nicht zerstört wird, kann man die Projektionen des Radius sofort zeichnen und daraus die wahre Länge bestimmen.

Zur Übung: I. Die Gleichungen (3), (4) trigonometrisch aus den Figuren abzuleiten. **II.** Das reguläre Ikosaeder in Orthogonalprojektion zu zeichnen, wenn eine Fläche in die Grundrißebene fällt. **III.** Die Mittelpunkte der Dodekaederflächen sind die Ecken eines Ikosaeders und umgekehrt; diese Bemerkung soll angewandt werden, um die Darstellung eines dieser Körper von der des anderen abzuleiten. **IV.** Die regulären Sternpolyeder, die durch Verlängerung der Kanten (bzw. Flächen) der beiden letzten Polyeder entstehen, darzustellen[1]) (vgl. Nr. 157, Schluß). **V.** Die in Nr. 157 beschriebenen halbregulären Polyeder in Orthogonalprojektion darzustellen, mit Hilfe der von den regulären Körpern gewonnenen Abbildungen (erforderlich ist dazu die Lösung der planimetrischen Aufgabe: Von einem regulären n-Eck alle Ecken so abzuschneiden, daß ein reguläres $2n$-Eck entsteht). **VI.** Die Zentralprojektion dieser Körper mit Hilfe der in Nr. 91 gegebenen Anweisung zu bestimmen.

---

1) Eine der Orthogonalprojektionen läßt sich durch bloßes Ziehen von Diagonalen des regelm. 10-Ecks herstellen, s. z. B. Fig. 20 (Anm. des Übers.).

166. Allgemeine Bemerkungen. I. Ist ein reguläres Polyeder in Orthogonalprojektion dargestellt, so kann man leicht die gemeinsame Größe der Flächenwinkel bestimmen. Sehen wir vom Würfel ab, wo diese Rechte sind, und betrachten zunächst diejenigen, die von gleichseitigen Dreiecken begrenzt sind (Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder). Sind ABC und ABD zwei in der Kante AB zusammenstoßende Flächen, und ist M die Mitte von AB, so sind CM und DM nicht nur Mittellinien, sondern auch Höhen dieser Dreiecke, weshalb CMD der gesuchte Flächenwinkel ist. Man hat also nur ein dem Dreiecke CMD kongruentes zu konstruieren, was leicht ist, da man die Projektionen von C und D kennt, als auch die von M, welche die Mitte von AB ist. Handelt es sich um das Dodekaeder, so betrachten wir wieder die aneinanderstoßenden Flächen $ABCDE$ und $ABB_1P_1A_1$ und die Mitte M von AB. Dann liefert das Dreieck DMP_1 den gesuchten Winkel, und dieses läßt sich mit Hilfe der gegebenen Projektionen konstruieren.

Zur Übung. Sind 2α und 2β die Flächenwinkel des reg. Tetraeders und Oktaeders, so ist $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

II. Die metrischen Beziehungen, die wir bei dieser speziellen Darstellung der regulären Polyeder abgeleitet haben, ermöglichen uns auch die Darstellung in irgend einer anderen uns bekannten Methode zu gewinnen, wenn man z. B. eine der Flächen des regulären Polyeders kennt und in ihr zwei aufeinanderfolgende Ecken desselben. Um ein bestimmtes Beispiel zu nehmen, mögen für das Dodekaeder die für die Zentralprojektion erforderlichen Bezugselemente gegeben sein, sowie die Ebene $\tau \equiv [ti']$ der Grundfläche $ABCDE$, sowie die Lage der Punkte A' und B'. Wir legen τ in die Bildebene um, und zeichnen die Punkte (A) und (B), sodann (C), (D), (E). Bezeichnen wir nun die Orthogonalprojektion auf die Ebene τ durch eine ^{0}, so lassen sich ja die Punkte (F^0), ... (L^0) und (A^0_1), ... (L^0_1) finden. Bringen wir dann τ wieder in seine ursprüngliche Lage, so finden wir leicht C', D', E', $F^{0'}$ .... $L^{0'}$ und $A_1^{0'}$ .... $L_1^{0'}$. Durch Anwendung des Satzes (in Bd. I S. 130) können wir dann die Spuren der Ebenen finden, in denen die Ecken liegen 1) $A_1B_1C_1D_1E_1$ 2) $F_1G_1H_1K_1L_1$ 3) $EGHKL$, indem von diesen Ebenen, die zu τ parallel sind, die Abstände von τ bekannt sind. Es sei nun I' der Antipol von i', der gemeinsamen Fluchtgeraden der vier betrachteten Ebenen. Um nun z. B. die Ecke F zu finden, haben wir nur den Schnitt der letzten Ebene mit der durch F_0 gehenden — dieser Punkt ist durch seine Projektion und eine durch ihn gehende Ebene bestimmt — und I' zum Fluchtpunkt habenden Geraden aufzusuchen. Ähnlich lassen sich die übrigen Ecken auffinden. Dem geschickten Zeichner wird es jedoch nicht entgehen, daß sich die bezüglichen Konstruktionen oft ver-

einfachen lassen, wenn man darauf Rücksicht nimmt, daß gewisse Gruppen von Polyederkanten einander parallel sind oder in demselben Punkte konvergieren.

Viertes Kapitel.

Die Fundamentalaufgaben über Polyeder.

167. Ist ein Polyeder nach einer Methode, die wir früher kennen gelernt haben, dargestellt, so können wir alle Aufgaben, die sich auf dasselbe beziehen, graphisch lösen. Wir wenden uns zunächst denjenigen zu, die man mit gutem Rechte als Fundamentalaufgaben bezeichnet (vgl. Nr. 21 Anm.) wegen der vielseitigen und fortwährenden Anwendung.

Aufgabe I. Die Abwickelung eines Polyeders in eine Ebene zu finden. Es sei ein Polyeder $\mathfrak{P}$ gegeben, und wir denken uns seine Oberfläche längs einer geeigneten Zahl von Kanten aufgeschnitten und dann die Flächen um die übrigen noch gebliebenen Kanten gedreht, so daß schließlich alle Flächen in dieselbe Ebene ausgebreitet sind: dann erhalten wir das Netz des Polyeders oder die Abwickelung der Oberfläche in eine Ebene. Diese Abwickelung bildet immer eine einfach zusammenhängende Fläche (vgl. S. 17) bestehend aus einer bestimmten Zahl ebener Polygone, von denen jedes eine Seite mit dem benachbarten gemeinsam hat.[1]

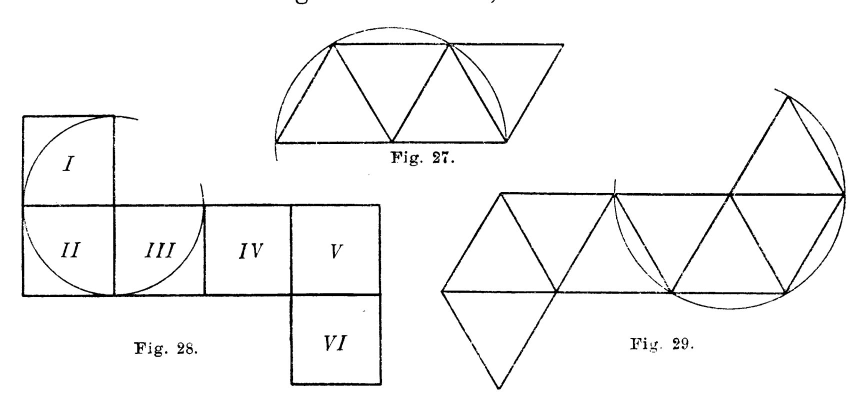


Fig. 27. Fig. 28. Fig. 29.

Ist das betrachtete Polyeder regulär und konvex, so besteht die Abwickelung aus einer gewissen Zahl regelmäßiger Vielecke mit der Seite l. So hat man beim Tetraeder 3 von einer Ecke ausgehende Kanten aufzuschneiden und die Flächen in die von den 3 anderen

1) Diese Operation hat besondere praktische Bedeutung, und offenbar ist sie ein Rest der vorwissenschaftlichen Periode, wodurch die darstellende Geometrie hindurch gegangen ist. Sie ist notwendig, wenn man z. B. graphisch die Oberfläche eines Polyeders ausmessen will.

gebildete Ebene niederzulegen, wir erhalten dann die Fig. 27. Beim Würfel sind 7 Kanten aufzuschneiden, 4 Seitenkanten und je 3 in der Grund- bzw. Deckfläche, wir erhalten die Fig. 28, wo I die Grundfläche, VI die Deckfläche war. Beim Oktaeder sind 5 Kanten aufzuschneiden, Fig. 29, beim Ikosaeder 11, beim Dodekaeder 10 Kanten: wir erhalten so die Figuren 30 und 31. — Statt in der letzteren Figur die einzelnen Fünfecke

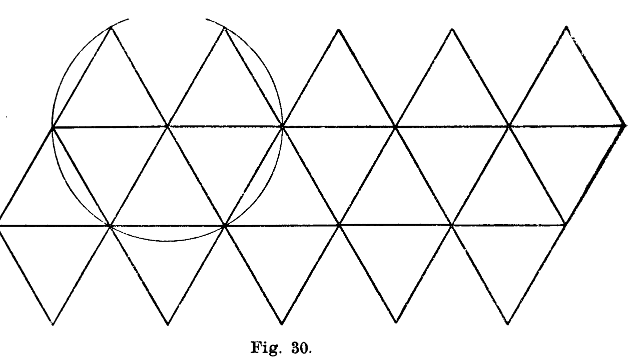
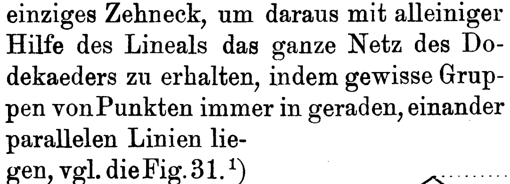


Fig. 30.

mühsam zu zeichnen, kann man gleich jede Hälfte des Netzes durch bloßes Ziehen von Diagonalen in einem regelmäßigen Zehnecke erhalten, wie aus der Figur leicht zu erkennen ist. Es genügt sogar ein



einziges Zehneck, um daraus mit alleiniger Hilfe des Lineals das ganze Netz des Dodekaeders zu erhalten, indem gewisse Gruppen von Punkten immer in geraden, einander parallelen Linien liegen, vgl. die Fig. 31.[1])

Ist das abzuwickelnde Polyeder eine Pyramide, so kann man die sämtlichen Seitenkanten aufschneiden und dann die Seitenflächen in die Ebene der Grundfläche niederlegen, oder man schneidet sämtliche Grund-

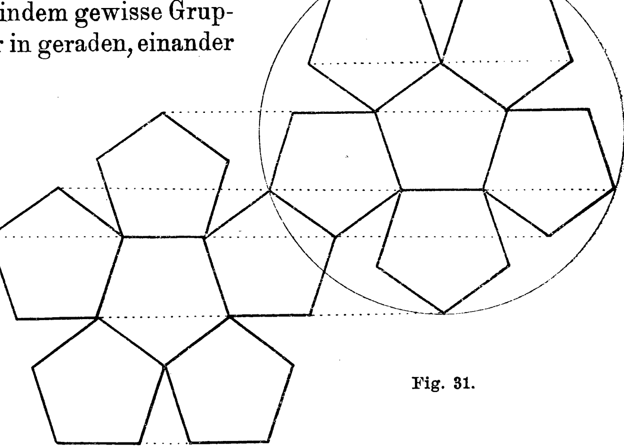


Fig. 31.

kanten auf bis auf eine, und eine Seitenkante. Handelt es sich um ein Prisma, so schneidet man eben so die Grund- und Deckflächenkanten bis auf eine auf und eine Seitenkante, dann bleibt der Mantel zusammenhängend; ist das Prisma nicht gerade, so legt man zweckmäßig einen Normalschnitt durch die Seitenkanten. Wie man in besonderen Fällen die nötigen Konstruktionen auszuführen hat, wird aus den nachfolgenden Beispielen hervorgehen.

1) Anm. des Übersetzers.

168. Eine Pyramide sei durch ihre Spitze $V \equiv (V', V'')$ die Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$ ihrer Grundfläche $ABC\ldots$ und durch deren erste Projektion $A'B'C'\ldots$ bestimmt (s. Fig. 32): daraus ihre Abwickelung in eine Ebene zu zeichnen. Zu diesem Zwecke legen wir die Ebene τ in die Grundrißebene um, und dann die Seitenflächen in diese neue Ebene der Grundfläche. Zunächst fällen wir von V auf die Ebene τ das Lot h und bestimmen seinen Fußpunkt H (vgl. Nr. 31); die Länge dieses Lotes ist die Hypotenuse eines Dreiecks $LV'H'$, dessen eine Kathete $V'H'$, dessen andere die Differenz $V''M$ der ersten Koten der Punkte V und H ist. Legen wir nun τ in die π_1 um, so läßt sich die Umlegung (H) von H leicht finden. Die Umlegung $(A)(B)(C)\ldots$ der Grundfläche ist alsdann die der Figur $A'B'C'\ldots$ entsprechende in der Affinität, deren Achse t_1 ist, und bei der (H) und H' zwei entsprechende Punkte sind (vgl. Nr. 36); also läßt sich diese Umlegung bald finden.

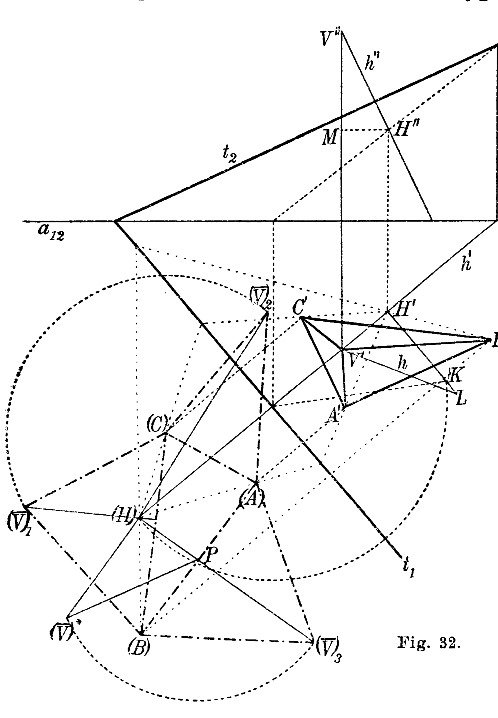


Fig. 32.

Stellen wir uns jetzt vor, daß an der genannten Umlegung die ganze Pyramide teilnehme, so erhält die Spitze V eine neue Lage $\overline{V}$ (vg. die Anm. in Nr. 36), deren Projektion offenbar der Punkt (H) ist, und sein Abstand von π_1 ist die vorhin ermittelte Höhe h der Pyramide. Fällen wir nun noch das Lot $(H)P$ auf $(A)(B)$, so entsteht das bei (H) rechtwinklige Dreieck $\overline{V}(H)P$ mit der Kathete $\overline{\overline{V}(H)} = h$, das wir also in seiner Umlegung $P(H)(\overline{V})^*$ leicht zeichnen können. Wird jetzt die Pyramidenfläche $\overline{V}(A)(B)$ in die Grundrißebene heraufgelegt, so kommt $\overline{V}$ in eine Lage $(\overline{V})_3$ auf $(H)P$, und zwar derart, daß $P(\overline{V})_3 = P(\overline{V})^* = P(\overline{V})$ wird. $(\overline{V})_3$ kann also leicht gefunden werden, und damit die Umlegung der einen Pyramidenfläche. Legen wir jetzt die zweite Fläche $\overline{V}(B)(C)$ um, so kommt $\overline{V}$ in eine Lage $(\overline{V})_1$ auf dem von (H) auf $(C)(A)$ gefällten Lote $(H)Q$, und zwar läßt sich die Entfernung $Q(\overline{V})_1$ analog wie oben aus einem rechtwinkligen Dreieck $Q(H)(\overline{V})^{**}$ bestimmen, dessen eine Kathete wieder h ist. Man kann aber $(\overline{V})_1$ auch finden, wenn man mit

$(B)(\overline{V})_3$ um (B) einen Kreis beschreibt, denn $B(\overline{V})_1$ und $(B)(\overline{V})_3$ sind ja die Umlegungen derselben Kante. Ähnlich findet man die Umlegungen der übrigen Flächen nach der einen oder anderen Weise, die sich gegenseitig kontrollieren. Die Gleichheit der letzten Umlegung mit der ersten liefert eine gute Kontrolle für die Genauigkeit der Zeichnung. — Aus dieser Konstruktion ergibt sich auch die Lösung der analogen Aufgabe für ein beliebiges Polyeder, da man ja ein solches in Pyramiden zerlegen kann.

Zur Übung: Dieselbe Aufgabe in der gleichen Weise zu lösen, wenn die Data in Zentralprojektion gegeben sind.

In ganz analoger Weise vollzieht sich die Abwickelung eines Prismas, das durch die Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$ seiner Grundfläche, die erste Projektion derselben $A'B'C' \ldots$ und die beiden Projektionen L', L'' einer Ecke der Deckfläche $LMN \ldots$, die der Ecke A der Grundfläche entspricht, bestimmt ist.[1]) Man bestimme zunächst den Fußpunkt H und die Länge h des von L auf t gefällten Lotes, lege dann τ in die π_1 um, und bestimme die Umlegungen von H, und $ABC \ldots$. Nimmt nun auch das ganze Prisma an dieser Umlegung teil, so erhält die Deckfläche eine neue Lage $\overline{L}\overline{M}\overline{N} \ldots$. Wird jetzt das recktwinklige Dreieck $\overline{L}(H)(A)$ in die π_1 umgelegt, so kommt $\overline{L}$ auf der in (H) zur $(H)(A)$ errichteten Senkrechten in dem Abstande h, wodurch $(\overline{L})$ leicht gefunden ist. Wird jetzt die Fläche $(A)(B)\overline{M}\overline{L}$ in die π_1 umgelegt, so kommt $\overline{L}$ auf dem von (H) auf $(A)(B)$ gefällten Lote zu liegen, derart daß $(A)(\overline{L})_1 = (A)(\overline{L})$ wird, also ist seine neue Lage $(\overline{L})_1$ bald gefunden. $(\overline{M})_1$ ist dann die vierte Ecke des Parallelogramms, das $(A)(B)$ und $(A)(\overline{L})$ als aufeinanderfolgende Seiten hat. — Die Fläche $(B)(C)\overline{L}\overline{M}$ gibt in der Umlegung ebenfalls ein Parallelogramm, dessen Höhe ebenso wie vorhin bestimmt wird, und dessen eine Seite $(B)(\overline{M})_2 = (B)(\overline{M})_1$ wird. In ähnlicher Weise findet man der Reihe nach die Umlegungen aller Seitenflächen. Fügt man nun ein der Grundfläche kongruentes Vieleck hinzu, so ist das Netz des Prismas vollständig.

Zur Übung: Dieselbe Aufgabe in entsprechender Weise zu lösen, wenn die Data in Zentralprojektion gegeben sind.

Anmerkung. Die obigen Konstruktionen erfahren bemerkenswerte Vereinfachungen, wenn, wie üblich, die Grundfläche in einer der Projektionsebenen, oder bei der Zentralprojektion in der Bildebene liegt.

169. Aufgabe II. Den Schnitt eines Polyeders mit einer Ebene zu bestimmen.

Unter dem Schnitt eines Polyeders $\mathfrak{P}$ mit einer Ebene σ versteht man ein Polygon, dessen Ecken die Schnittpunkte von σ mit den Kanten von $\mathfrak{P}$, und dessen Seiten die Schnittlinien von σ mit den

1) Die Figur möge sich der Leser selbst entwerfen.

Flächen von $\mathfrak{P}$ sind; natürlich gelten als Ecken nur jene Punkte, die auf den Kanten selber, nicht deren Verlängerungen liegen, und als Seiten nur diejenigen Teile der Schnittlinie, die innerhalb der Flächen selbst liegen. Eben darin beruht die Schwierigkeit der Aufgabe, die ja andernfalls nichts anderes wäre als eine wiederholte Anwendung zweier Fundamentalaufgaben der Lage (vgl. Nr. 21). Da nun ein Polygon sowohl durch seine Ecken, als auch durch seine Seiten bestimmt werden kann, so kann man mit der Konstruktion dieser oder jener bei dem gesuchten Polygon beginnen; in beiden Fällen wird es aber notwendig sein, die Reihenfolge der aufgefundenen Elemente festzustellen, und dazu mögen die folgenden Bemerkungen dienen.

a) Man bezeichne mit 1, 2, 3 ... die Flächen des gegebenen Polyeders, und im allgemeinen mit (ik) die Kante, in der sich die Flächen i und k schneiden, und mit $[ik]$ den Punkt, in welchem die begrenzte Kante (ik) die Ebene σ trifft, falls dies überhaupt eintritt. Alsdann stelle man zweckmäßig eine Tabelle derjenigen symbolisch bezeichneten Kanten, sowie auch eine derjenigen Punkte auf, in denen die begrenzten Kanten (die Strecken) die Ebene σ schneiden. Man nehme nun beliebig einen heraus $[ik]$ und suche in der Tabelle einen Punkt, der mit ihm das eine Symbol i oder das andere k gemeinsam hat. Es werden sich im allgemeinen zwei solche finden, von denen man nach Belieben einen wählt, etwa $[il]$. Die die beiden Punkte $[ik]$, $[il]$ verbindende Strecke ist dann offenbar eine Seite des gesuchten Polygons. Nun verfahre man ebenso mit $[il]$ und erhält so jene zweite Seite des Polygons, die den Punkt $[il]$ enthält. Fährt man so fort, so gelangt man schließlich wieder an den Ausgangspunkt $[ik]$ zurück. Werden auf diese Weise alle Punkte der Tabelle erschöpft, so ist die Aufgabe gelöst; wenn nicht, so greife man einen der übrig gebliebenen Punkte heraus und verfahre damit in der gleichen Weise, bis kein Punkt der Tabelle übrig bleibt. Das oder die so gefundenen Polygone bilden den gesuchten Schnitt.

b) In dem Falle, daß man mit der Konstruktion der Seiten des Schnittpolygons beginnen will, bezeichne man mit $[i]$ die Strecke, in welcher die Fläche i von $\mathfrak{P}$ die Ebene σ schneidet und bilde sich eine Tabelle der entstehenden Symbole. Man nehme nun beliebig das Element $[i]$ und suche in der Tabelle ein anderes Element $[k]$ derartig, daß die Flächen i und k eine Kante von $\mathfrak{P}$ gemeinsam haben (durch Vergleich mit der sub a) gefertigten Tabelle). Man wird zwei solche finden, und man nehme beliebig eins davon, etwa $[k]$ und verfahre damit wie vorhin mit $[i]$, man erhält dann außer $[i]$ noch eine andere Seite, etwa $[l]$ des gesuchten Polygons usw. Schließlich wird man zur anfänglichen Seite zurückkommen. Werden dadurch alle Elemente der Tabelle erschöpft, so ist die Aufgabe vollständig gelöst; andernfalls hat man das Verfahren von neuem mit einem der übrig-

gebliebenen Elemente zu beginnen und so fortzufahren, bis alle Elemente der Tabelle erschöpft sind.

170. Es mögen zuerst einige Fälle angeführt werden, in denen die besprochene Aufgabe eine ziemlich einfache Lösung liefert. Als Beispiel nehmen wir ein gerades Prisma mit der auf der Grundrißebene liegenden Grundfläche $ABC, ..$ der dazu parallelen Deckfläche $A_1 B_1 C_1 \ldots$, das von einer beliebigen Ebene $\tau \equiv [t_1 t_2]$ geschnitten wird. In diesem Falle ist lediglich der Aufriß der Schnittfläche $LMN\ldots$

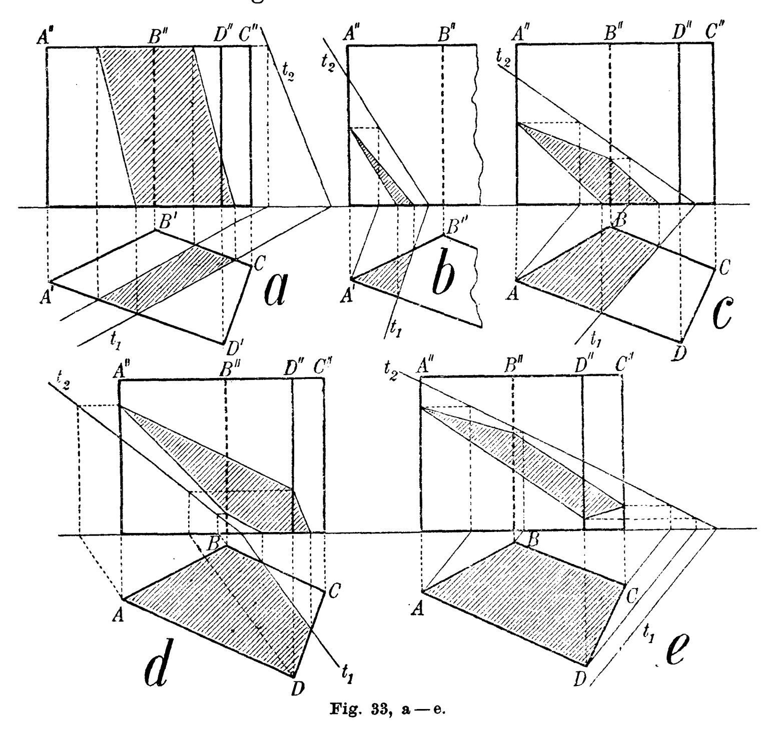


Fig. 33, a—e.

zu suchen, da der Grundriß ganz oder teilweise mit $ABCD\ldots$ zusammenfällt. Es können hier nun folgende Fälle eintreten:

1. Die Ebene τ trifft weder eine der Seitenkanten AA_1, $BB_1, \ldots$ noch auch eine der Grundkanten $AB, \ldots, A_1 B_1, \ldots$; dann hat sie auch keinen Schnitt mit dem Prisma.

2. τ trifft keine der Seitenkanten, wohl aber zwei Grundkanten. Dann trifft sie auch zwei Kanten der Deckfläche, und der Schnitt ist ein Trapez, von dem zwei Seiten auf den Seitenflächen, zwei auf den Grundflächen liegen (Fig. 33 a).

3. τ schneidet nur eine Seitenkante; dann trifft sie auch nur zwei Kanten der Grundfläche (oder der Deckfläche), und die Schnittfigur ist ein Dreieck (Fig. 33 b).

4. τ schneidet nur zwei Seitenkanten; dann trifft sie außerdem noch zwei Kanten einer der beiden Grundflächen, und der Schnitt ist ein Viereck (Fig. 33c).

5. τ schneidet nur drei Seitenkanten; dann schneidet sie, falls die Zahl der Seitenkanten n größer als 3 ist, noch zwei Kanten der Grund- (oder Deckfläche), und der Schnitt ist ein Fünfeck (Fig. 33d). Allgemein: Schneidet sie k Seitenkanten $(k < n)$, so wird die Schnittfigur ein $(k + 2)$-Eck.

6. Schneidet τ alle Seitenkanten, dann trifft sie keine der Grundkanten, und der Schnitt ist ein n-Eck (Fig. 33e), dessen Ecken dieselbe Reihenfolge haben, wie ihre Projektionen, die Ecken der Grundfläche.

Zur Übung führe man dasselbe Verfahren an einem Prismenstumpf aus, dessen Grundfläche in der Grundrißebene liegt.

Ein anderer ziemlich allgemeiner Fall, in dem die Aufgabe sich leicht lösen läßt, ist der, daß die schneidende Ebene eine Projektionsebene ist. Haben wir z. B. das Polyeder $ABCD\ldots$ dargestellt in Orthogonalprojektion, und ist die schneidende Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$ senkrecht zur Grundrißebene, so fällt die erste Projektion der Schnittfigur in eine Strecke, indem die Projektionen ihrer Ecken $P'\,Q', R', S'\ldots$, die Schnitte der Kantenprojektionen mit t_1 sind (vgl. Fig. 34); alsdann ist der Aufriß leicht zu finden. PQ liegt in der Fläche ABC, QR in ACD, RS in BCD usw., woraus die richtige Verbindung der gefundenen Punkte sich ergibt.

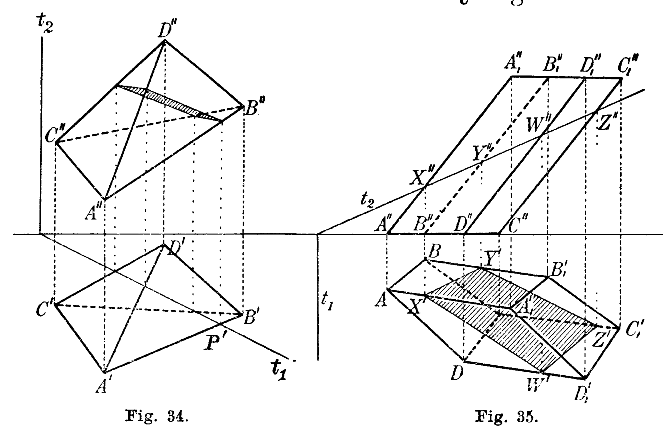


Fig. 34. Fig. 35.

Ähnlich hat man zu verfahren, wenn die schneidende Ebene senkrecht zur Aufrißebene steht (vgl. das Beispiel der Fig. 35).

Wendet man Zentralprojektion an, und will z. B. den Schnitt eines Tetraeders $ABCD$ — die Ecken seien als $A \equiv (T_A I_A', A')\ldots$ bestimmt — mit einer projizierenden Ebene σ, deren Spurlinie t sei, bestimmen, so hat man nur zu untersuchen, welche von den Strecken $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$, $A'C'$, $C'A'$ die Gerade t schneiden. Sind dies z. B. die Strecken $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$, und sind X_2', X_3', X_4' die Schnittpunkte, so ist das Dreieck $X_2 X_3 X_4$ der gesuchte Schnitt, dessen Gestalt und Größe man durch Umlegung von σ in die Bildebene finden kann.

171. Der Vorteil, den projizierende Ebenen bieten, und dessen wir uns im Vorigen bedient haben, hat noch eine größere Bedeutung, wie aus dem Folgenden sich ergeben wird: sie können nämlich dazu dienen, den Schnitt eines beliebigen Polyeders P mit einer ganz beliebigen Ebene zu finden, und zwar auf folgende Weise.

a) In dem Falle, daß wir die Mongesche Methode benutzen, sei $\tau \equiv [t_1, t_2]$ die schneidende Ebene, die nicht durch die Achse gehe, π_1 und π_2 wie gewöhnlich die Bildebenen. An Stelle der vertikalen Ebene π_2 nehmen wir eine andere $\overline{\pi}_2$, die sowohl senkrecht zu π_2, als auch zu τ ist; hierzu brauchen wir nur als Achse eine Gerade $\overline{a}_{12}$ zu nehmen, die senkrecht zu t_1 läuft und im übrigen beliebig ist. Da nunmehr τ senkreckt zu $\overline{\pi}_2$ ist, so ist in dem neuen System τ eine projizierende Ebene. Wir suchen nun die neue Vertikalprojektion $\overline{\mathfrak{P}}''$ des Polyeders auf, ebenso die vertikale Spurlinie $\overline{t}_2$ von τ; damit haben wir die Mittel, in dem neuen Bezugssystem die gestellte Aufgabe zu lösen. Kehren wir dann zu dem ursprünglichen System zurück, so ist die eigentliche Aufgabe selbst gelöst. In der Fig. 36 ist die Konstruktion ausgeführt, und zwar für eine Pyramide mit der Spitze $V \equiv (V', V'')$ und einer horizontalen Grundfläche $ABCD$. — Man beachte, daß der Grundgedanke dieser Lösung keine wesentliche Veränderung erfährt, wenn die schneidende Ebene τ parallel zur Achse oder insbesondere durch diese geht (und daher durch einen ihrer Punkte $K \equiv (K', K'')$ bestimmt wird); in diesem Falle benutzt man die

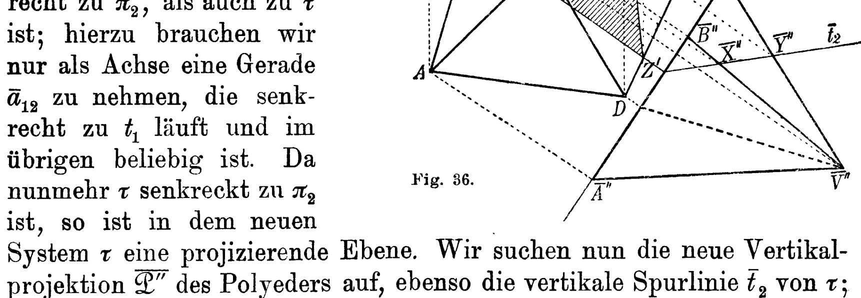


Fig. 36.

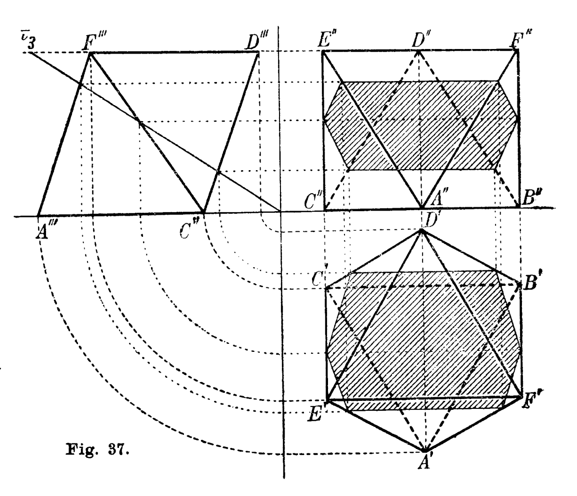
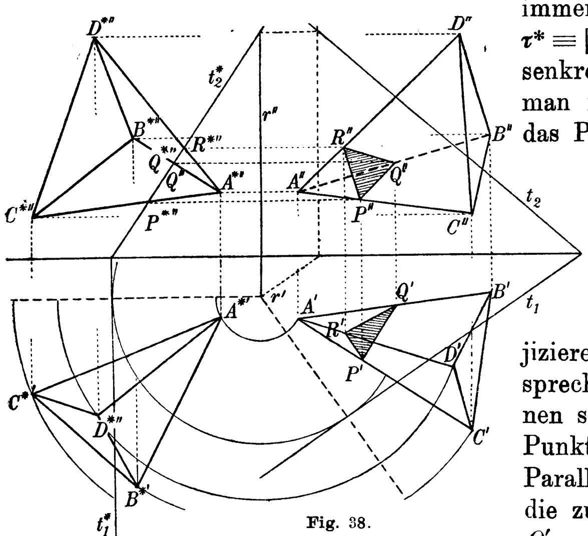


Fig. 37.

Seitenrißebene π_3, zeichnet den Seitenriß des Polyeders und die dritte Spurlinie t_3 von τ. Man hat dann sofort die dritte Projektion der Schnittfläche und kann daraus leicht die beiden anderen konstruieren. In Fig. 37 ist die Konstruktion für ein reguläres Oktaeder, das mit einer Seitenfläche in der π_1 liegt, ausgeführt.

Die Zurückführung des Falles, daß die schneidende Ebene beliebig ist, auf den, daß sie eine projizierende Ebene wird, läßt sich außer durch Verlegung der Bildebenen, auch durch Rotation um eine vertikale (oder horizotale) Achse r bewirken. Gibt man nämlich dem Drehungswinkel eine geeignete Größe, so läßt sich die Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$ immer in eine derartige Lage $\tau^* \equiv [t_1^*, t_2^*]$ bringen, daß t_1^* senkrecht zu a_{12} wird. Nimmt man nun bei dieser Rotation das Polyeder mit in die neue Lage $A^*B^*C^* \ldots$ (vgl. Nr. 45), dann werden die Ecken $P, Q, R, \ldots$ der Schnittfigur bei der neuen Lage im Aufriß sich in die Punkte projizieren, in denen t_2^* die entsprechenden Kantenprojektionen schneidet; die durch diese Punkte zur Achse gezogenen Parallelen liefern $P'', Q'' \ldots$, die zugehörigen Ordinaten $P', Q' \ldots$ In der Fig. 38 ist die Konstruktion auf ein beliebiges Tetraeder angewandt. — Zur Vereinfachung der Konstruktion könnte man die Rotationsachse durch eine (oder zwei) Ecken des Polyeders gehen lassen; im allgemeinen wird jedoch diese Konstruktion komplizierter sein, als das vorige Verfahren, denn während es dort genügte $\mathfrak{P}''$ zu zeichnen, muß man hier sowohl $\mathfrak{P}^{*\prime}$ als auch $\mathfrak{P}^{*\prime\prime}$ herstellen.


Fig. 38.

b) Benutzen wir aber die Methode der Zentralprojektion, und ist $\tau \equiv [ti']$ die schneidende Ebene, so ersetzen wir (vgl. Nr. **84**) das ursprüngliche Projektionszentrum C durch den Punkt K, in dem τ von der Distanzlinie CC_0 geschnitten wird. Dadurch wird τ in eine projizierende Ebene verwandelt. Ist nun die neue Darstellung des Polyeders $\mathfrak{P}$ gefunden, so wird man leicht erkennen, welche Kanten von $\mathfrak{P}$ durch τ getroffen werden, und daraus den Schnitt herstellen können. Kehrt man dann zu dem ursprünglichen System zurück, so erhält man das gewünschte Resultat. In der Fig. 39 ist das Verfahren auf den einfachsten Fall angewendet, nämlich den einer Pyra-

mide, deren Grundfläche $ABC\ldots$ in der Bildebene liegt. Die ausgeführten Operationen sind: 1. die Bestimmung des neuen Distanzkreises; 2. Aufsuchung der neuen Darstellung $V^{\cdot}$ der Spitze V; 3. Bestimmung der Pyramidenkanten, die von der Geraden t getroffen werden, in den Punkten $X^{\cdot}$, $Y^{\cdot}$, $Z^{\cdot}$, die die Projektionen der Schnittpunkte vom neuen Projektionszentrum aus sind; 4. wird C_0 mit $X^{\cdot}, Y^{\cdot}, Z^{\cdot}$ verbunden und gibt auf $V'A$ X', auf $V'B$ $Y' \ldots$ usw. Es wäre allenfalls noch zu untersuchen, ob und wo das Vieleck $ABC\ldots$ von t geschnitten wird.

Dies Verfahren wird unbrauchbar, wenn die gegebene Ebene parallel zur Bildebene ist. Um nun ein anderes zu finden, beachten wir folgendes: Wenn τ mit der vorderen Parallelebene zusammenfiele, so würden sich die Ecken des Schnittpolygons alle ins Unendliche projizieren, daher werden sich solche Ecken nur auf denjenigen Kanten AB des Polygons vorfinden, deren Endpunkte auf verschiedenen Seiten der vorderen Parallelebene liegen, also auf solchen Kanten AB, deren Projektionen $A'B'$ in Pseudostrecken übergehen (vgl. Bd. I, Nr. 60), daher sind die Ecken des Schnittpolygons die unendlich fernen Punkte der Geraden, die diejenigen Kanten des Polyeders enthalten, die sich in Pseudostrecken projizieren; ihre Reihenfolge wird sich nach Nr. 169 bestimmen lassen. Werden nun diese Ecken auf die Bildebene gelotet, so bekommt man eine dem Schnittpolygon identische Figur. Ist nun die schneidende Ebene τ verschieden von der vorderen Parallelebene, aber eine zur Bildebene parallele Ebene $\tau \equiv [TI', A']$, so läßt sie sich auf einen Spezialfall zurückführen. Man hat nur als neues Projektionszentrum den Punkt zu wählen, in welchem τ von der im Hauptpunkte C_0 auf der Bildebene errichteten Senkrechten getroffen wird. Der Radius des neuen Distanzkreises ist dann gleich dem absoluten Werte der Kote des Punktes A. Man suche nun die Darstellung des Polyeders in bezug auf das neue System und diejenigen Kanten, die sich in Pseudostrecken projizieren: jeder solchen entspricht eine Ecke des Schnittes.

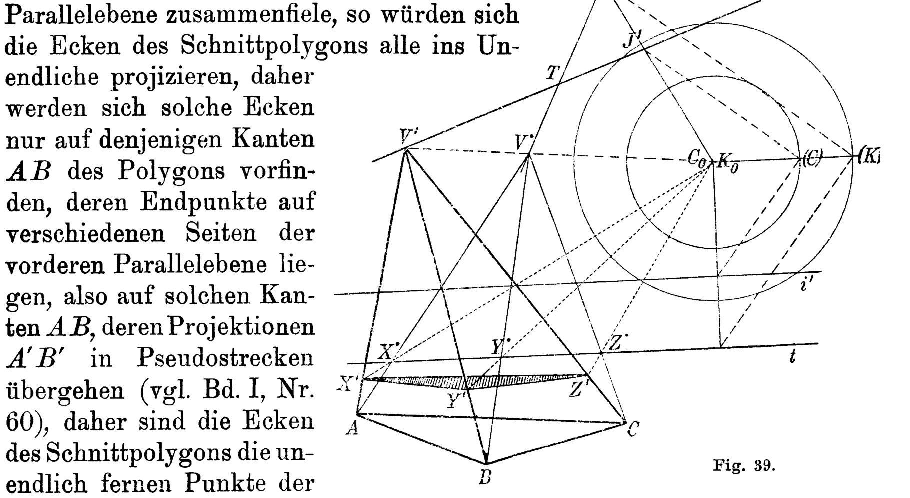


Fig. 39.

c) Will man dieselbe Aufgabe nach der Methode der kotierten Ebenen lösen, so kommen von den früheren ganz verschiedene Gedankengänge zur Anwendung.

τ soll zunächst nicht parallel zur Bildebene sein. Betrachten wir nun zwei aufeinanderfolgende Ecken des Polyeders, $A \equiv (A', a)$ und $B \equiv (B', b)$, so sind A' und B' zugleich die Projektionen zweier Punkte A_0 und B_0 von τ, deren Koten a_0 und b_0 sich nach dem Verfahren in Nr. 96 bestimmen lassen. Liegt nun eine Ecke X der gesuchten Schnittfigur auf AB, so müssen offenbar die Strecken AB und A_0B_0 einen Punkt gemeinsam haben, und dies erfordert, daß die Strecken AA_0 und BB_0 entgegengesetzten Sinn haben; es müssen also die Differenzen $a - a_0$ und $b - b_0$ entgegengesetzte Vorzeichen haben. Nehmen wir dies an, so ist

$$\frac{A'X'}{B'X'} = \frac{AX}{BX} = \frac{AA_0}{BB_0} = \frac{a - a_0}{b - b_0};$$

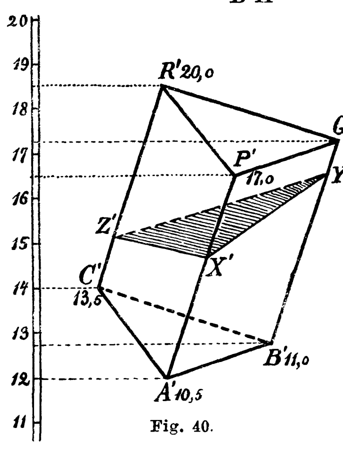


Fig. 40.

also ist X', die Projektion des Punktes X, jener Punkt der Strecke $A'B'$, der sie im Verhältnis $(a - a_0):(b - b_0)$ teilt. Um dies nun auf einen konkreten Fall anzuwenden, betrachten wir das dreiseitige Prisma mit den Ecken $A \equiv (A', 10.50)$, $B \equiv (B', 11.00)$. $C \equiv (C', 13.50)$; $P \equiv (P', 17.00)$, $Q \equiv (Q', 17.50)$; $R \equiv (R', 20.00)$, und wollen seinen Schnitt mit der in Fig. 40 durch ihre Neigungsskala dargestellten Ebene ermitteln. Die Koten der Punkte $A_0, B_0, \ldots R_0$, in denen die Ebene von den in $A', B', \ldots R'$ errichteten Senkrechten getroffen werden, ergeben sich dann als 12, 12.75, 14, 16.50, 17.25, 18.50. Bezeichnen wir diese mit $a_0, b_0 \ldots r_0$, die der gegebenen Punkte mit $a, b \ldots r$, so wird

$$a - a_0 = -1.50, \qquad b - b_0 = -1.75, \qquad c - c_0 = -0.50,$$
$$p - p_0 = 0.50, \qquad q - q_0 = 0.25, \qquad r - r_0 = 1.50,$$

woraus hervorgeht, daß die Seitenkanten AP, BQ, CR alle von der Ebene getroffen werden. Es wird nun

$$\frac{a - a_0}{p - p_0} = -3, \qquad \frac{b - b_0}{q - q_0} = -7, \qquad \frac{c - c_0}{r - r_2} = -\frac{1}{3},$$

und daraus lassen sich dann die Projektionen X', Y', Z' der Schnittpunkte X, Y, Z elementar auffinden.

Ist aber die Ebene τ parallel der Bildebene, und q die gemeinsame Kote ihrer Punkte, so kann sie die Kante AB nur dann treffen, wenn die Differenzen $a - q$ und $b - q$ verschiedenes Vorzeichen haben, trifft dies zu, so läßt sich der Schnittpunkt sogleich finden als Punkt der Kante AB mit der Kote q.

Ist endlich τ zur Bildebene senkrecht, und somit durch ihre Spur gegeben, so ersieht man sogleich aus der Figur, welche Polyederkanten getroffen werden, und hat alsbald die Darstellung der Schnittpunkte; in welcher Weise sie aufeinander folgen, findet man durch Anwendung der Bemerkungen in Nr. 169. Will man noch die Gestalt der Schnittfigur selbst haben (eine Gestalt, die man aus der Figur direkt nicht ersehen kann), so hat man noch die Ebene τ in die Bildebene umzulegen.

Zur Übung: I. Schneide einen Würfel durch eine beliebige Ebene, wickele ihn ab und trage auch die Schnittkanten in die Abwickelung ein. **II.** Schneide das in Nr. 164 dargestellte reg. Dodekaeder mit einer beliebigen durch den Mittelpunkt gehenden Ebene.

172. Der Fall, daß das zu schneidende Polyeder eine Pyramide oder ein Prisma darstellt, ist so häufig, daß es nicht überflüssig sein dürfte, einige diesbezügliche Bemerkungen beizufügen. Handelt es sich um eine Pyramide mit der Spitze V und der Grundfläche Π, die in einer Ebene π liegen möge, und es soll der Schnitt Σ mit einer Ebene σ bestimmt werden, so wollen wir zunächst annehmen, daß σ alle Seitenkanten der Pyramide treffe. Dann sind Π und Σ perspektive Figuren in bezug auf V als Zentrum. Projizieren wir sie daher von einem beliebigen Punkte auf eine beliebige Ebene, so sind (Nr. 159) die entsprechenden Figuren Π' und Σ' homologisch in bezug auf V' als Zentrum und der Projektion der Geraden $\pi\sigma$ als Achse. Ist daher nur eine Ecke von Σ' konstruiert, so lassen sich die übrigen nach dem Verfahren, das uns die projektive Geometrie lehrt, finden. — Schneidet aber σ die Grundfläche der Pyramide, so entspricht nur ein Teil von Π' der Schnittfigur Σ' in der angegebenen Homologie, die dann durch eine Strecke innerhalb des ganzen Polygons Σ' zu ergänzen ist. — Wir überlassen es dem Leser diesen Hinweis zu vervollständigen, sowohl für die Verwendung der Orthogonal- als auch der Zentralprojektion.

Ähnliche Überlegungen können angewandt werden, wenn das zu schneidende Polyeder ein Prisma ist. Die verschiedenen Fälle, die dann möglich sind, haben wir schon in Nr. 170 besprochen.

Die obigen Bemerkungen finden teilweise Anwendung bei der folgenden Aufgabe, die wir hier behandeln als Beispiel eines Falles, daß die schneidende Ebene nicht durch ihre Spuren bestimmt ist, nämlich:

Eine Pyramide mit der Spitze $V \equiv (V', V'')$ und der in π_1 liegenden Grundfläche $ABCDEF$ soll durch eine Ebene τ geschnitten werden, die die Seitenkanten VA, VC, VE in den gegebenen Abständen a, c, e von der Spitze trifft (s. Fig. 41).

Auflösung: Man betrachte das Dreieck ACE als Basis einer Hilfspyramide mit der Spitze V, und lege ihre beiden Seitenflächen

VAC und VAE in die Grundrißebene π_1 um. Zufolge der ersten Umlegung gelangt V in einen Punkt (V) des von V' auf AC gefällten Lotes $V'H$ in einem Abstande von H gleich der Hypotenuse HK eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten $V'H$ und $V'K$, die vertikale Kote von V, sind. Zufolge der zweiten Umlegung aber kommt V in einen Punkt $(V)^*$ des von V' auf AE gefällten Lotes, derart daß $A(V)^* = A(V)$. Somit lassen sich die Umlegungen der Dreiecke leicht zeichnen. Nun tragen wir auf $(V)A$ und $(V)^*A$ die Strecken $(V)(P)$ und $(V)^*(P)^* = a$ ab und auf $(V)C$ und $(V)^*E$,

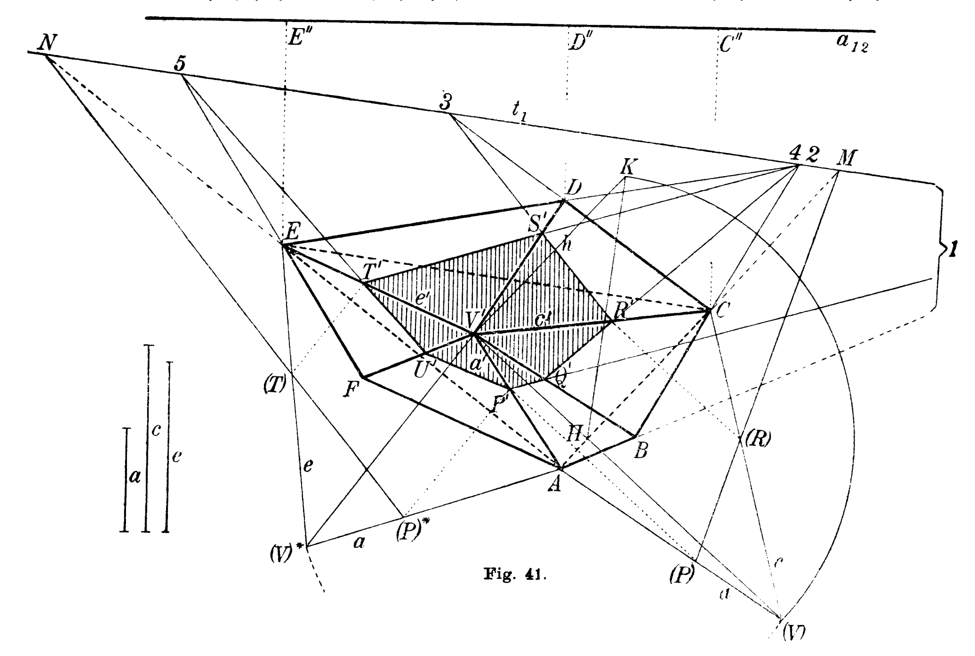


Fig. 41.

die Strecken $(V)(R) = c$ und $(V)^*(T) = e$ ab. Die von (R) auf AC und von (T) auf AE gefällten Lote schneiden $V'C$ und $V'E$ in den Projektionen R' und T' von R und T, dagegen die von (P) und $(P)^*$ auf dieselben Geraden gefällten Lote schneiden sich in P' auf der Geraden $V'A$. Nun sind die Geraden $(P)(R)$ und $(P)^*(T)$ offenbar die Umlegungen derjenigen Geraden, in denen die gesuchte Ebene, die Ebenen VAC und VAE schneidet. Nun liegen aber die Geraden PR und AC in derselben Ebene, also gehört deren Schnittpunkt M, durch den auch die Umlegung $(P)(R)$ gehen muß, der horizontalen Spurlinie der Schnittebene an. Gleichermaßen wird auch der Schnittpunkt N der Geraden AE und $(P)^*(T)$ dieser Spur angehören, es ist also $MN \equiv t_1$. Nun entsprechen sich, gemäß der früheren Bemerkung die Punkte $ABCD\ldots$ und $P'Q'R'S'\ldots$ in einer Homologie mit dem Zentrum V', der Achse t_1; A, P'; C, R'; E, T' sind drei Paare ent-

sprechender Punkte, und somit ist die Homologie mehr als hinreichend bestimmt. Daraus kann nun die erste Projektion des gesuchten Polygons vervollständigt werden.

Nämlich: der Schnitt von AB mit t_1 sei 1, dann schneidet $1P'$, $V'B$ in Q; zur Kontrolle diene, daß $Q'R'$ und BC sich in einem Punkte 2 von t_1 treffen müssen. Jetzt bestimmen wir den Punkt 3, in welchem CD t_1 trifft; dann schneidet $3R$ die $V'D$ in S'; zur Kontrolle diene, daß DE und $S'T'$ sich in einem Punkte 4 von t_1 treffen müssen. So kann man fortfahren um die übrigen Ecken zu finden. Jedoch gelten nur solche Punkte als Ecken der Schnittfigur, die innerhalb der Strecken VA, VB... liegen; wenn das nicht eintritt, so ist das Polygon durch die Strecke der Geraden t_1 zu schließen, die innerhalb des Polygons ABC... liegt. Die zugehörige Vertikalprojektion ist nun leicht zu finden.

Allgemeine Bemerkung: Ist die Darstellung des Schnittes eines Polyeders $\mathfrak{L}$ mit einer Ebene σ gefunden, so kann man Umlegung von σ den Schnitt in seiner wahren Gestalt und Größe finden, und durch Abwickelung des Polyeders den Verlauf der Schnittlinien auf den einzelnen Flächen.

Zur Übung. I. Ein beliebiges Tetraeder durch eine Ebene zu schneiden, die durch einen gegebenen Punkt geht, derart, daß die Schnittfigur ein Parallelogramm wird. (Die Ebene muß parallel zu zwei gegenüberliegenden Kanten werden.) **II.** Dieselbe Aufgabe in Zentralprojektion zu lösen. **III.** Eine Pyramide mit trapezförmiger Grundfläche durch eine Ebene so zu schneiden, daß ein Parallelogramm als Schnitt entsteht.

173. Aufgabe III. Den Schnitt einer Geraden g mit einem beliebigen Polyeder $\mathfrak{L}$ zu finden.

Auflösung: Wir legen durch g eine beliebige Ebene σ und bestimmen deren Schnitt Σ mit $\mathfrak{L}$; die gesuchten Durchstoßpunkte sind dann die, in denen g den Umfang von Σ schneidet. Den Umstand, daß σ beliebig ist, kann man zur Vereinfachung der Konstruktion benutzen. Im allgemeinen, d. h. wenn keine einschränkenden Voraussetzungen über die Gestalt und Lage des Polyeders gemacht werden, wird es zweckmäßig sein für σ die g projizierende Ebene zu nehmen; wenn man die Orthogonalprojektion benutzt, hat man die Wahl zwischen zwei (bzw. drei) die g projizierende Ebenen. So ist in Fig. 42 der Schnitt der Geraden $g \equiv (g', g'')$ mit einem in Orthogonal-

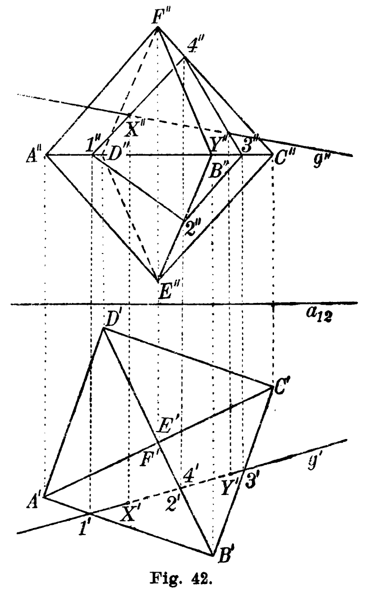


Fig. 42.

projektion dargestellten Oktaeder bestimmt, indem die g auf die Grundrißebene projizierende Ebene benutzt wurde. Ihre Schnittpunkte mit den Kanten sind mit 1, 2, 3, 4 bezeichnet.

Sollte die schneidende Gerade senkrecht zur Achse sein (also durch zwei ihrer Punkte bestimmt), so suche man sowohl von der Geraden, als auch vom Polyeder den Seitenriß; man erhält dann die gesuchten Punkte, wenn man mit der zweiten und dritten Projektion ebenso verfährt, wie vorhin mit der ersten und zweiten.

Wendet man die Methode der kotierten Ebenen an, so kann man ähnlich verfahren. Um dies an einem Beispiele zu zeigen, nehmen wir ein dreiseitiges Prisma mit den Ecken $A \equiv (A', 6.50)$, $B \equiv (B', 3.0)$, $C \equiv (C', 4)$; $L \equiv (L', 9.50)$, $M \equiv (M', 6.0)$, $N \equiv (N', 7.0)$ und wollen die Schnittpunkte mit der durch ihre Projektion g' und die Neigungsskala gegebenen Geraden g bestimmen (s. die Fig. 43).

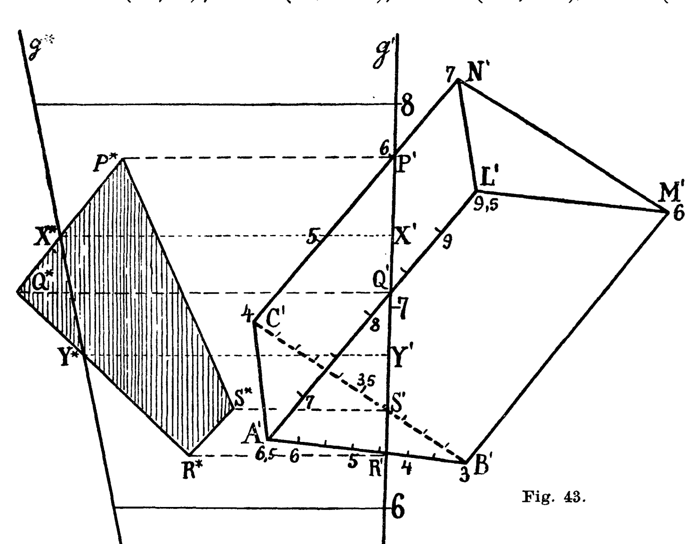


Fig. 43.

Zu diesem Zwecke schneiden wir das Prisma mit einer durch g' gehenden, zur Bildebene senkrechten Hilfsebene. Wir finden dann, wenn wir auch auf den geschnittenen Kanten die Neigungsskala auftragen, als Schnitt das Viereck mit den Ecken $P \equiv (P', 6.0)$, $Q \equiv (Q', 8.2)$, $R \equiv (R', 4.4)$, $S \equiv (S', 3.3)$, liegend auf den Kanten CN, AL, AB, BC. Nun legen wir die Hilfsebene in die Bildebene um, und erhalten dann — da ja die Maßeinheit auch gegeben sein muß — die Umlegung $P^* Q^* R^* S^*$ des Vierecks und der Geraden. Die Punkte $X^* Y^*$, in denen die Gerade g^* das Viereck schneidet, sind dann die Umlegungen der gesuchten Punkte; die von ihnen auf g' gefällten Lote liefern die Projektionen X', Y' dieser Punkte, deren Koten sich auf der Neigungsskala von g ablesen lassen.

Wie sich die Konstruktion ändert, wenn g parallel oder senkrecht zur Bildebene ist, möge der Leser selber ausfinden.

Soll endlich die Aufgabe in Zentralprojektion gelöst werden, so müssen wieder andere Ideen benutzt werden; eine wäre folgende. Ginge g durch das Projektionszentrum, so würden alle ihre Punkte,

insbesondere auch die Durchstoßpunkte mit der Polyederfläche mit ihrem Spurpunkte T und dem Fluchtpunkte I' zusammenfallen. Die Projektionen der gesuchten Punkte müssen nun innerhalb der Projektionen der Polyederflächen liegen; es ist also das Netz der Polygone und Pseudopolygone zu untersuchen, die die Projektionen der Polyederflächen bilden, und zu sehen, welche von ihnen den Punkt $T \equiv I'$ enthalten; jede solche liefert einen der Durchstoßpunkte, der dann völlig bestimmt ist, da man seine Projektion kennt, und eine ihn enthaltende Ebene. Nun läßt sich diese besondere Lage durch eine einfache Verlegung des Projektionszentrums herbeiführen: man nehme nämlich als solches einen beliebigen Punkt der Geraden (TI'). Unter den verschiedenen möglichen Wahlen, ist die zweckmäßigste, den Punkt K zu nehmen, in dem TI' die Verschwindungsebene trifft. Der neue Hauptpunkt K_0 ist dann die vierte Ecke des Parallelogramms $I'CTK_0$ (s. Bd. I, S. 138); die neue Distanz ist gleich der alten. Die Verlegung des Zentrums nimmt also die spezielle Form an, von der im I. Bd. auf S. 138 die Rede war. Man suche nun die neue Darstellung des Polyeders, und bestimme, innerhalb welcher Projektionen der Flächen der Punkt T fällt; zur Auffindung der Durchstoßpunkte genügt die Bestimmung der Darstellung der Punkte, die diese Flächen mit g gemeinsam haben in dem ursprünglichen System.

Eine andere Art der Lösung wäre folgende: Die Gerade g wird im allgemeinen (wenn das Polyeder konvex ist) in zwei Punkten X und Y treffen, die jeder einer bestimmten Fläche desselben angehören; wüßte man nun, welches diese beiden Flächen sind, so wäre die Aufgabe auf die zweifache Anwendung einer der Fundamentaufgaben zurückgeführt. Um die bezügliche Untersuchung auszuführen, nennen wir die Ecken des Polyeders $A, B, C, D \ldots$ und deren Projektionen parallel zur Geraden g auf die Bildebene $A_0, B_0, C_0 \ldots$ Es ist klar, daß in den Spurpunkt T von g auch die Projektionen X_0, Y_0 der gesuchten Punkte fallen, und ebenfalls, wenn X z. B. in die Fläche $LMNP$ fällt, $X_0 \equiv T$ innerhalb des Vielecks $L_0 M_0 N_0 P_0$ fallen muß, und umgekehrt. Ist daher in der Bildebene die Projektion des Polyeders parallel zu g gezeichnet, so findet man im allgemeinen zwei Polygone, innerhalb deren T liegt; die entsprechenden Polyederflächen werden dann von g in den gesuchten Punkten getroffen. Bei Ausführung dieser Konstruktion sind zwei Umstände zu berücksichtigen: 1. Die Punkte $A_0, B_0 \ldots$ sind nichts anderes als die Spuren der zur Geraden (TI') durch $A, B \ldots$ gezogenen Parallelen in der Bildebene, lassen sich daher nach dem bekannten Verfahren (Bd. I, S. 95) auffinden. 2. Zur Auffindung der Punkte, in denen g die nach obigem Verfahren ermittelten Polyederflächen trifft, braucht man nur eine Hilfsebene durch g zu legen; die Geraden, in denen diese die beiden Flächen schneidet, treffen g in den gesuchten Punkten.

174. Ist das Polyeder $\mathfrak{P}$ von besonderer Art, so kann es nützlicher sein, die Hilfsebene σ in anderer Weise zu wählen. Handelt es sich zum Beispiel um eine Pyramide (oder ein Prisma), so kann man die durch g und die Spitze der Pyramide (bzw. parallel zu den Seitenkanten des Prismas) gehende Ebene als Hilfsebene nehmen. Diese schneidet dann die Ebene der Grundfläche in einer Geraden s, die den Umfang in den Punkten $P, Q \ldots$ treffen möge. Alsdann schneiden die Geraden $VP, VQ, \ldots$ die g in den Punkten $X, Y, \ldots$, die, falls sie innerhalb der Seitenflächen liegen, die gesuchten Durchstoßpunkte sind; hinzuzufügen ist allenfalls noch der Punkt, in dem g die Grundfläche trifft. Ist, wie es meistens der Fall sein wird, die Grundfläche ein einfach konvexes Polygon, so beträgt die Zahl der Punkte $P, Q, \ldots$ und somit der $X, Y, \ldots$ höchstens zwei. Liegen dann X und Y beide auf den Seitenflächen, so liegt die Strecke XY ganz im Innern der Pyramide; liegt nur einer darauf, so trifft g auch die Grundfläche, und liegt keiner darauf, so schneidet g die Pyramide überhaupt nicht.

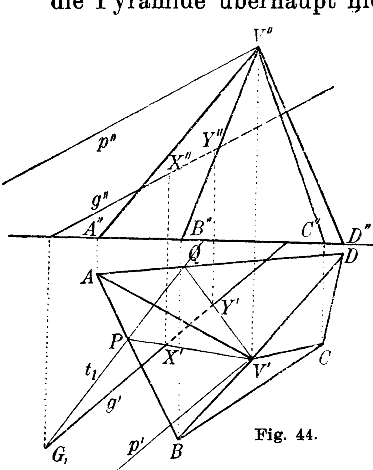


Fig. 44.

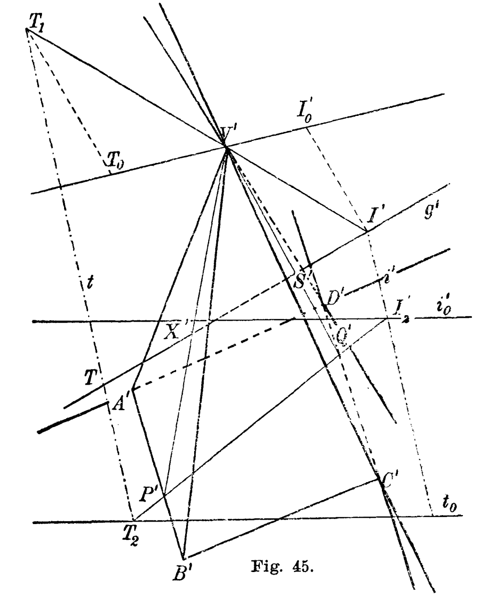


Fig. 45.

In der Fig. 44 ist das Verfahren angewandt zur Bestimmung der Punkte X, Y in denen die Gerade $g \equiv (g'g'')$ die Pyramide trifft, deren Grundfläche $ABCD$ auf der Grundrißebene liegt und deren Spitze $V \equiv (V', V'')$ ist; die Hilfsebene enthält die Geraden p und g, t_1 ist deren erste Spur, die man allein zur Konstruktion nötig hat.

In Fig. 45 dagegen ist Zentralprojektion angewendet: $g \equiv (T, I')$ ist die Gerade, $A'B'C'D'$ die Projektion der in der Ebene $(t_0 i_0')$ gelegenen Grundfläche, $V \equiv (T_0 I_0', V')$ die Spitze der Pyramide. Die Hilfsebene ist $[ti']$, durch die Gerade (T, I') bestimmt und durch (T_1, I'), die durch V zu der vorigen parallel gezogene Gerade. —

Die vorigen Betrachtungen auf Prismen anzuwenden, oder im Falle daß man die Methode der kotierten Projektionen braucht, wolle der Leser nicht verfehlen.

175. Aufgabe IV. Den Schnitt zweier Polyeder $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ zu finden.

Die Schnittlinie zweier Polyeder wird von einem oder mehreren, im allgemeinen windschiefen Polygonen gebildet, die zu Ecken die einzelnen Durchstoßpunkte der Kanten des einen mit den Flächen des anderen haben, vorausgesetzt, daß diese innerhalb der begrenzten Flächen und der begrenzten Kanten liegen.[1]) Die Seiten dieser Polygone sind jene Schnittlinien der Flächen von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, die innerhalb dieser selbst liegen. Im allgemeinen besteht der Schnitt aus mehreren Polygonen; wenn er aber nur aus einem einzigen besteht, so tritt jedes Polyeder in das Innere des andern ein, ohne anderswo wieder herauszutreten; wir haben dann den Fall der Ausreißung (Arrachement). Besteht er aus zweien, so tritt das eine Polyeder in das andere ein und wieder heraus; wir haben dann eine sog. Durchdringung vor uns. Um den Schnitt zweier Polyeder, die nach einer der bekannten Methoden dargestellt sind, zu finden, kann man damit beginnen, direkt entweder die Ecken oder die Seiten der Schnittpolygone zu suchen, d. h. man sucht zuerst die Punkte, in denen die Kanten des einen Polyeders die Flächen des anderen treffen, oder man sucht die den Flächen der beiden Polyeder gemeinsamen Strecken. In speziellen Fällen wird man zweckmäßig die beiden Polyeder durch Hilfsebenen schneiden. Sind diese Pyramiden oder Prismen, so wird man vorteilhaft Ebenen verwenden, die durch die Verbindungslinie der Spitzen der Pyramiden und die Kanten einer der beiden gehen, da jede derartige Ebene die andere Pyramide in Geraden schneidet, die die Kanten der ersteren in den Ecken der gesuchten Schnittfigur trifft.

Sind nun die Ecken der Schnittfigur gefunden, so ist noch zu bestimmen, in welcher Reihenfolge sie zu verbinden sind, also wie die Seiten der Schnittfigur laufen. Zu dem Zwecke muß man beachten, daß jede Ecke sowohl einer Fläche von $\mathfrak{P}_1$, als auch einer von $\mathfrak{P}_2$ angehört. Bezeichnen wir die Flächen von $\mathfrak{P}_1$ mit $1, 2, 3, \ldots$ und die von $\mathfrak{P}_2$ mit $\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \ldots$, so können wir mit $(1, 2)\ (2, 3) \ldots$ die Kanten von $\mathfrak{P}_1$, mit $(\mathrm{I}, \mathrm{II})\ (\mathrm{II}, \mathrm{III}) \ldots$ die von $\mathfrak{P}_2$ symbolisch bezeichnen. Sind nun i, k, l drei beliebige Zahlen der ersten Reihe, I, K, L solche der zweiten, so lassen sich die Ecken der gesuchten Schnittfigur symbolisch als $(ik)L$, $(IK)l$ bezeichnen. Zweckmäßig wird man sich eine Tabelle der sämtlichen Ecken der Schnittfigur anfertigen. Der erste von den beiden obigen Punkten ist dann der Schnittpunkt der drei Ebenen i, k, L, daher werden die von ihm ausgehen-

1) Als Ausnahmefälle sind anzusehen, der, daß eine Kante von $\mathfrak{P}_1$ eine von $\mathfrak{P}_2$ schneidet, oder daß eine Kante von $\mathfrak{P}_1$ in eine Fläche von $\mathfrak{P}_2$ fällt, u. a.

den Seiten der Schnittfigur mit (iL) und (kL) bezeichnet werden können. Diese Seiten haben jede noch einen Eckpunkt, dessen Symbol von einem der folgenden Typen sein muß: $(im)L$, $(km)L$, $(LM)i$, $(LM)k$. Nun suche man in der Tabelle jene Punkte auf, die dieser Bedingung genügen; im allgemeinen erhalten wir zwei, einen folgenden und einen vorhergehenden. Man nehme einen von diesen beliebig und verfahre mit ihm in gleicher Weise und so fort, bis man zum Ausgangspunkte zurückgekehrt ist. Wenn auf diese Weise alle in der Tabelle stehenden Ecken erschöpft werden, was besagt, daß der Schnitt aus einem einzigen Linienzug besteht, so ist das Verfahren erledigt. Im anderen Falle wird der Schnitt aus mehreren getrennten Zügen bestehen. Um diese zu finden, braucht man nur auf einen der übrig gebliebenen Punkte zurückzugreifen und damit ebenso wie mit dem vorigen Ausgangspunkte zu verfahren. Um die Zeichnung ausdrucksvoller zu machen, ist es gut, die sichtbaren Teile des Schnittes von den nichtsichtbaren unterschiedlich zu machen; man beachte hierbei, daß nur diejenigen Seiten des Schnittes sichtbar sind, die zwei bei beiden Polyedern sichtbaren Flächen angehören.

176. Zur besseren Erläuterung der obigen Darlegungen wollen wir sie auf ein ziemlich einfaches Beispiel anwenden, nämlich auf die

Aufgabe: Die Durchdringung einer geraden rechtwinkligen Säule mit einem beliebigen, dreiseitigen Prisma zu finden.

Wir bezeichnen mit I, II, III, IV die Seitenflächen der Säule, und mit 1, 2, 3 die Seitenflächen des Prismas $ABC\,A_1B_1C_1$ (Fig. 46). Die Betrachtung der Figur zeigt uns: die Fläche I schneidet die Kanten (12) und (23) des Prismas; II schneidet nur die Kante (23); III schneidet (12) und (13), und IV trifft nur die Kante (13). Also erhalten wir folgende Ecken des gesuchten Schnittes, in denen die Prismenkanten die Säulenflächen durchstoßen: $H \equiv \mathrm{I}(12)$, $J \equiv \mathrm{I}(23)$, $K \equiv \mathrm{II}(23)$, $L \equiv \mathrm{III}(12)$, $M \equiv \mathrm{III}(13)$, $N \equiv \mathrm{IV}(13)$.

Die ersten Projektionen dieser Punkte sind unmittelbar gefunden, da ja die Seitenflächen senkrecht auf der Grundrißebene stehen. Ihre zweiten Projektionen erhält man mit Hilfe der zugehörigen Ordinaten, indem man die Mantellinien des Prismas ins Auge faßt, auf denen sie liegen.

Jetzt handelt es sich noch um die Punkte, in denen die Säulenkanten die Prismenflächen durchstoßen. Man ersieht aus der Figur 46, daß die Kante (I IV) der Säule, die Prismenflächen 1 und 3 durchbohrt, erstere in P, letztere in Q; da PQ senkrecht zu π_1, so fallen die Projektionen P' und Q' in einen Punkt zusammen. Die Kante (II III) durchbohrt die Flächen 2 und 3, erstere in R, letztere in S. R' und S' fallen wieder zusammen. Da die andern Kanten das Prisma nicht treffen, so sind nur noch die zweiten Projektionen dieser vier

Punkte zu suchen. Zu dem Zwecke ziehen wir durch P und Q die Parallelen p und q zu den Seitenkanten des Prismas; p' und q' fallen dann zusammen in die durch $P' \equiv Q'$ zu $A'A_1'$ gezogene Parallele, die $A'B'$ in P_0' und $A'C'$ in Q_0' treffen möge. Sofort sind nun P_0'' und Q_0'' gefunden, und die durch diese Punkte zu $A''A_1''$ gezogenen Parallelen sind p'' und q''; diese schneiden dann die gemeinsame Ordinate von P und Q in den gesuchten Punkten P'' und Q''. Ganz ebenso findet man R'', S''. Mit diesen vier neuen Punkten: $P \equiv (\mathrm{I\,IV})1$, $Q \equiv (\mathrm{I\,IV})2$, $R \equiv (\mathrm{II\,III})2$, $S \equiv (\mathrm{II\,III})3$ ist die Untersuchung der Ecken der Durchdringungsfigur erledigt; suchen wir jetzt noch die Seiten.

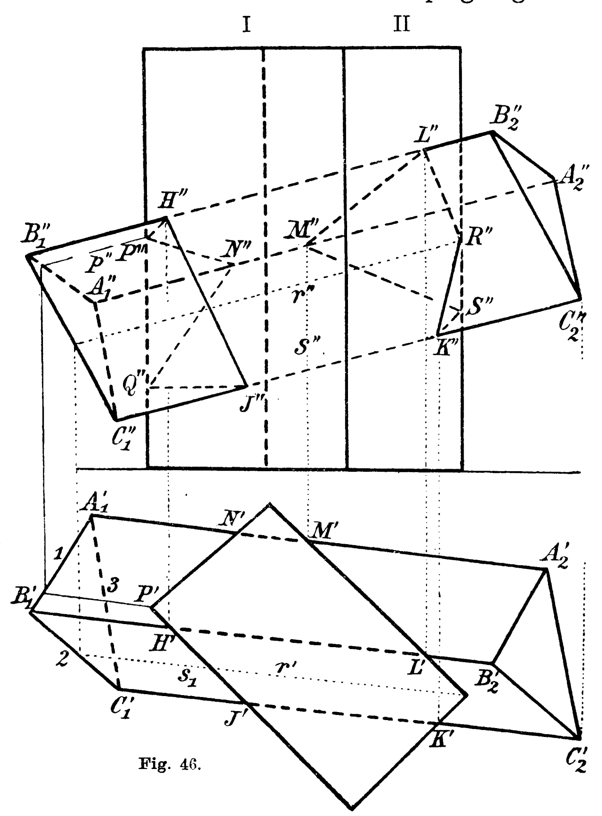


Fig. 46.

Die Ecken H, J liegen sowohl auf der Fläche I der Säule, als auch auf 2 des Prismas, also ist $HJ \equiv \mathrm{I}2$ eine Seite des gesuchten Schnittes. Ebenso liegen die Punkte $J \equiv \mathrm{I}(23)$ und $Q \equiv (\mathrm{I\,IV})3$ beide in den Flächen I und 3; also ist $JQ \equiv \mathrm{I}3$ eine zweite Seite desselben Schnittes; eine dritte ist $QN \equiv \mathrm{IV}3$, eine vierte $NP \equiv \mathrm{IV}1$, eine fünfte $PH \equiv \mathrm{I}1$. Somit sind wir zum Ausgangspunkte zurückgekehrt; da aber nicht alle Eckpunkte erschöpft sind, so besteht der Schnitt noch aus einem weiteren Polygon. Um dies zu bestimmen, nehmen wir eine der bisher noch nicht benutzten Ecken, z. B. $K \equiv \mathrm{II}(23)$. Sie liegt ebenso wie $R \equiv (\mathrm{II\,III})2$ auf den Flächen 2 und II; somit ist KR eine neue Seite des Schnittes. Auf sie folgt $RL \equiv 2\mathrm{III}$, dann $LM \equiv 1\mathrm{III}$, $MS \equiv 3\mathrm{III}$, und schließlich $SK \equiv \mathrm{II}3$. Fassen wir zusamen, **so besteht der gesuchte Schnitt aus zwei windschiefen Fünfecken**, das eine ist $HJQNP$, das andere $KRLMS$. Man beachte, daß im Aufriß nur die Flächen I, II, 2 der beiden Körper sichtbar sind, und demnach auch nur ihre Schnitte, die Seiten HJ und KR.

Zur Übung. I. Den Schnitt zweier regulär sechsseitiger Prismen zu finden, von denen das eine mit der Grundfläche, das andere mit der Seitenfläche in der Grundrißebene liegt. **II.** Den Schnitt zweier schiefer Pyramiden, die mit ihrer quadratischen Grundfläche in der Grundrißebene liegen, zu zeichnen.

Anmerkung. Das Problem der Durchdringung zweier Polyeder findet eine wichtige Anwendung bei der Untersuchung des **Selbstschattens** eines Polyeders. Dieser wird nämlich begrenzt von der Schnittlinie des Polyeders mit der körperlichen Ecke die ihm umbeschrieben ist, und den leuchtenden Punkt zum Scheitel hat, der sog. **Streiflinie.** Auf dasselbe Problem läßt sich auch die Aufsuchung des Schattens, den ein Polyeder auf ein anderes wirft, zurückführen, während die Auffindung des **Schlagschattens**, gleichbedeutend ist mit der Aufsuchung des Schnittes einer Pyramide (oder Prismas) mit einer Ebene.

Zweites Buch.
Kurven.

Erstes Kapitel.
Ebene Kurven.

§ 1. Kurven als geometrische Örter von Punkten.

177. Bewegt sich ein Punkt P in einer Ebene nach einem bestimmten Gesetze, so ist der geometrische Ort Γ der von P eingenommenen Lagen eine im allgemeinen nicht gerade, sondern gekrümmte Linie, eine Kurve. Ist Γ eine ebene Kurve, so pflegt man in ihrer Ebene ein kartesisches System zweier Achsen anzunehmen und mit x, y die Koordinaten eines beliebigen Punktes P von Γ zu bezeichnen;[1]) x und y sind dann Größen, die nicht konstant, sondern veränderlich, etwa mit der Zeit t, sind; mit anderen Worten: x und y sind bestimmte Funktionen von t, etwa

$$x = \xi(t), \qquad y = \eta(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

In diese können wir eine andere unabhängige Variabele τ einführen, die mit t durch eine andere bestimmte Beziehung verknüpft ist, etwa

$$t = \varphi(\tau);$$

infolgedessen werden die Gl. (1) zu

$$x = \xi(\varphi(\tau)), \qquad y = \eta(\varphi(\tau)),$$

oder kürzer

$$x = \bar{\xi}(\tau), \qquad y = \bar{\eta}(\tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Gleichungen (2) sind von demselben Typus wie (1), und dies zeigt uns: 1. Es ist nicht nötig, daß die Zeit jene unabhängige Variable sei; 2. aus einer analytischen Darstellung vom Typus (1) einer Kurve lassen sich unzählig viele, durch Veränderung der unabhängigen Variabeln ableiten. Die Variable, durch deren Funktion sich die Koordinaten der Kurvenpunkte ausdrücken lassen, heißt der Parameter, und die analytische Darstellung vom Typus (1) heißt parametrische Darstellung; durch (t_0) werden wir den Punkt bezeichnen, welcher dem Werte t_0 des Parameters entspricht.

Eliminiert man t aus den Gl. (1), so erhält man eine Gleichung von der Form

$$f(x, y) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

1) Der Bequemlichkeit wegen setzen wir voraus, daß die Koordinaten rechtwinklig seien.



welche die Gleichung der Kurve heißt; aus ihr kann man auf unzählige Weisen eine parametrische Darstellung der Kurve erhalten, da man ja $x = \xi(\tau)$ setzen, wo die Funktion ξ beliebig ist, und y aus $f(\xi(t), y) = 0$ bestimmen kann. — In dem Falle, daß sich $f(x, y)$ in ein Produkt von r Funktionen $f_1, f_2 \ldots f_r$ zerlegen läßt, ist Γ aus r Kurven $f_i(x, y) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots r)$ zusammengesetzt, im anderen Falle ist Γ einfach; man setzt immer voraus, daß die zu untersuchende Kurve einfach sei. Umgekehrt: Nimmt man beliebig zwei Gleichungen von der Form (1) oder eine von der Form (3), so ist damit eine Kurve bestimmt.

Wir wollen jedoch die beliebige Gestalt der Funktionen ξ, η, f dadurch einschränken, daß wir immer annehmen, daß ihre Koeffizienten reelle Zahlen seien, woraus aber nicht folgt, daß auch die Kurve reelle Punkte besitzt;[1]) ferner daß die Funktionen im allgemeinen kontinuierlich seien und Ableitungen der betrachteten Ordnungen zulassen für alle Werte der Variabeln, die in die Rechnung eintreten.

Zur Übung: Wenn in (3) komplexe Koeffizienten vorkommen, so kann die Kurve dennoch eine Gruppe reeller Punkte enthalten. Warum?

Der Abstand zweier Punkte (t) und $(t + h)$ der Kurve (1) wird ausgedrückt durch

$$s = \sqrt{\overline{\xi(t+h) - \xi(t)}^2 + \overline{\eta(t+h) - \eta(t)}^2}.$$

Läßt man nun h gegen 0 konvergieren, d. h. nimmt man $h = dt$, so wird dieser Ausdruck unendlich klein, und bezeichnet man ihn mit ds, so hat man offenbar

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\overline{\xi'(t)}^2 + \overline{\eta'(t)}^2}.$$

Zufolge dessen wird die Länge s eines Bogens zwischen den Punkten (t_0) und (t_1) gegeben durch

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\overline{\xi'(t)}^2 + \overline{\eta'(t)}^2}.$$

Diese Länge läßt sich, von seltenen Ausnahmefällen abgesehen, nicht exakt durch geometrische Konstruktionen ermitteln, man wird daher im Falle eines praktischen Bedürfnisses, zu Näherungskonstruktionen gewöhnlich seine Zuflucht nehmen müssen.

Diesen Ausweg muß man sogar bei der einfachsten krummen ebenen Linie benutzen, und man kennt mehrere Methoden, einen beliebigen Kreisbogen näherungsweise zu rektifizieren. Da wir hiervon später Anwendung zu machen haben, soll hier eine Methode,

1) Als Beispiel diene $x^2 + y^2 + r^2 = 0$.

nämlich die von Rankine[1]) angegeben werden: **Ist AB der Bogen des Kreises, so verlängere man die Sehne AB um das Stück $BC = \frac{1}{2} AB$ und beschreibe um C mit CA als Radius einen Kreis, der die in B an den Kreis gezogene Tangente in D trifft: dann ist mit großer Annäherung $BD = \text{arc}\, AB$.**

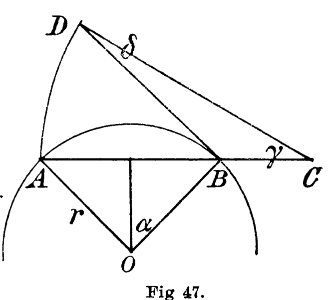


Fig 47.

Ist nämlich (s. Fig. 47) r der Radius des gegebenen Kreises und $\sphericalangle AOB = 2\alpha$, so ist $AB = 2r \sin\alpha$, und $BC = r \sin\alpha$, $CA = CD = 3r \sin\alpha$. Ferner $\sphericalangle CBD = \pi - \alpha$. Setzt man nun $\sphericalangle BDC = \delta$, $\sphericalangle BCD = \gamma$, so folgt aus dem Dreiecke BCD:

$$\sin\delta = \tfrac{1}{3}\sin\alpha, \text{ also } \delta = \text{arc sin}\left(\frac{\sin\alpha}{3}\right) = \text{arc cos}\sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{9}}.$$

Nun ist $\gamma = \alpha - \delta = \alpha - \text{arc sin}\,\frac{\sin\alpha}{3}$. Aus demselben Dreiecke ergibt sich aber auch $\overline{BD} = \overline{CD}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$, daher

$$\overline{BD} = 3r \sin\left\{\alpha - \text{arc sin}\,\frac{\sin\alpha}{3}\right\} = r\sin\alpha\left\{\sqrt{9 - \sin^2\alpha} - \cos\alpha\right\},$$

$$= r\sin\alpha\left\{3 - \frac{\sin^2\alpha}{2\cdot 3} + \frac{\sin^4\alpha}{2\cdot 4\cdot 3^3} - \cdots - \cos\alpha\right\}$$

$$= r\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \cdots\right)\left(2 + \frac{\alpha^2}{3} + \cdots\right) = r\cdot 2\alpha + \cdots.$$

wobei die unterdrückten Glieder Potenzen von α enthalten, die nicht kleiner sind als die vierte; ist nun α ein kleiner Bogen, so ist näherungsweise $BD = \text{arc}\, AB$, w. z. b. w. Ist nun α nicht klein, so könnte man die angegebene Konstruktion auf einen Bogen $\frac{\alpha}{2^k}$ anwenden, wo k eine hinreichend große ganze Zahl bedeutet.

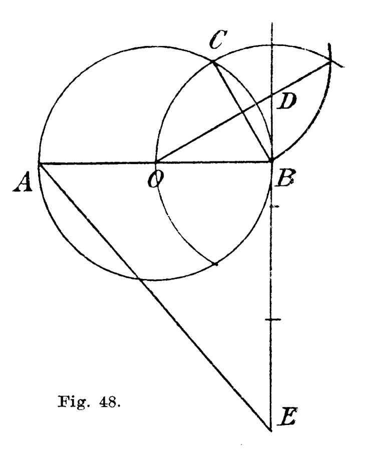


Fig. 48.

Wenn aber α ein aliquoter Teil des ganzen Umfanges ist, so könnte man den Bogen erhalten, wenn jener selbst rektifiziert ist. Nun gibt es auch hierfür verschiedene Verfahren, von denen wir hier folgendes sehr einfache anführen wollen, das man Kochansky (1685) zuschreibt.

Man zieht in dem Kreise einen beliebigen Durchmesser AB (s. Fig. 48) **und**

---

1) Vgl. L. Cremona, *Elemente des graphischen Calcüls.* Deutsch von M. Curtze (Leipzig 1875), S. 101. Bezüglich anderer Verfahren s. K. Pohlke, *Darstellende Geometrie*, II. Teil (Berlin 1876), S. 19 u. 20. d'Ocagne, Atti del IV. Congr. Intern. dei matematici 1908. III. Bd., S. 351.

in B an ihn die Tangente; dann zeichnet man die Sehne BC gleich dem Radius und fällt auf sie vom Zentrum O aus das Lot, das jene Tangente in D trifft. Von D aus trägt man nun auf der Tangente über B hinaus den Radius dreimal ab bis E; AE ist dann gleich dem halben Umfange des gegebenen Kreises. Nimmt man nämlich den Radius gleich der Maßeinheit, so wird

$$\overline{BD} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \overline{BE} = 3 - \frac{1}{\sqrt{3}},$$

und
$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 = \frac{40 - 6\sqrt{3}}{3} = 9{,}869217,$$

$\overline{AE} = 3{,}141533$. Die Abweichung beträgt also nur Hunderttausendstel.

Zur Übung: I. Aus der Olbersschen Näherungsformel $\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha}{3 + \operatorname{tg} \alpha}$ eine Konstruktion für α abzuleiten. **II.** Um den ganzen Kreis und damit auch bestimmte Teile desselben zu rektifizieren, teile man den Durchmesser in 5 gleiche Teile und konstruiere ein rechtwinkeliges Dreieck, das 3 und 6 dieser Teile zu Katheten hat: sein Umfang ist nahezu gleich der Kreisperipherie.

178. In der Ebene der durch Gl. (2) dargestellten Kurve Γ nehmen wir willkürlich einen Punkt $P_0(x_0, y_0)$ an und ziehen durch ihn eine beliebige Gerade g. Es seien α und β die Winkel, die g mit den Koordinatenachsen bildet, x, y die Koordinaten eines beliebigen anderen Punktes von g, und ϱ die Länge der Strecke $\overline{PP_0}$; dann ist

$$x = x_0 + \varrho \cos\alpha, \qquad y = y_0 + \varrho \cos\beta.$$

Um daher diejenigen Punkte P von g zu erhalten, die g mit Γ gemeinsam hat, muß man ϱ derart wählen, daß

$$f(x_0 + \varrho\cos\alpha,\ y_0 + \varrho\cos\beta) = 0$$

wird.

Entwickeln wir nach dem Taylorschen Lehrsatze, so wird

$$f(x_0, y_0) + \frac{\varrho}{1!}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos\beta\right\} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (4)$$
$$+ \frac{\varrho^2}{2!}\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \cos^2\alpha + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y}\right)_0 \cos\alpha\cos\beta + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \cos^2\beta\right\} + \cdots = 0$$

sein müssen, wo i. a. $\left(\frac{\partial^{m+n} f}{\partial y^m \cdot \partial y^n}\right)_0$ den Wert von $\frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial x^m \cdot \partial y^n}$ für $x = x_0$, $y = y_0$ bezeichnet.

Die aus dieser Gleichung sich ergebenden Werte von ϱ geben uns die Abstände des Punktes P_0 von den Punkten $P_1, P_2, \ldots$ in denen Γ von der Geraden g geschnitten wird.

Nehmen wir nun an, daß P_0 auch auf der Kurve Γ liege, so muß $f(x_0, y_0) = 0$ sein, und somit verliert die Gleichung (4) ihr absolutes Glied, und hat also eine Wurzel $= 0$, wie vorauszusehen, indem ja P_0 der Gruppe der Punkte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ angehört; also ist einer

der Abstände $P_0 P_1$, $P_0 P_2 \ldots$ gleich Null. Wählen wir nun die Gerade g in geeigneter Weise, so läßt es sich erreichen, daß die Gl. (4) eine zweifache Wurzel $= 0$ hat. Damit dies eintrete, ist nämlich nötig und hinreichend, daß

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos\beta = 0.$$

Da nun $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, so kann man diese Gleichung auch in folgender Form schreiben:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 : \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$$

und dies zeigt uns, daß im allgemeinen der Winkel α bestimmt ist, und somit auch die Gerade g. Diese Gerade, die durch den Punkt (x_0, y_0) geht und mit der x-Achse den Winkel α bildet, der durch die vorige Gleichung bestimmt ist, hat als Gleichung

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Sie heißt die Tangente an die Kurve im Punkte (x_0, y_0) und dieser Punkt heißt der Berührungspunkt. Die Tangente kann augenscheinlich als Grenzfall der durch jenen Punkt der Kurve Γ gezogenen Sehnen angesehen werden, wenn nämlich der zweite Endpunkt der Sehne an jenen Punkt unendlich nahe heranrückt. **Das Vorhandensein der Tangente in einem Punkte der Kurve hängt also davon ab, daß die beiden ersten partiellen Ableitungen des ersten Gliedes der Kurvengleichung in dem betrachteten Punkte bestimmt, und nicht beide gleich Null seien.** Die in einem Kurvenpunkte senkrecht zur zugehörigen Tangente gezogene Gerade heißt die **Normale** der Kurve; aus (5) geht hervor, daß diese für den Punkt (x_0, y_0) die Gleichung hat

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0}.$$

Die Tangente und die Normale in einem Kurvenpunkte lassen sich durch besondere Verfahren konstruieren, wenn man die Erzeugung der gegebenen Kurve kennt; das z. B. beim Kreise und den Kegelschnitten anzuwendende ist dem Leser bekannt. Es kann nun auch eintreten, daß der vorige Wert von α nicht nur den Koeffizienten von ϱ, sondern auch den von ϱ^2 in der Gleichung (4) verschwinden läßt, nämlich das Trinom:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y}\right)_0 \operatorname{tg}\alpha + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \operatorname{tg}^2\alpha.$$

In diesem Falle würde die Tangente in diesem Punkte drei in P_0 vereinigte Schnitte mit der Kurve Γ haben, dieser wäre dann ein Inflexions- oder Wendepunkt der Kurve. Damit demnach der

Punkt (x_0, y_0) ein Wendepunkt sei, müssen gleichzeitig die beiden Gleichungen erfüllt sein:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad f(x, y) = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad (6)$$

Hieraus geht hervor, **daß eine Kurve im allgemeinen eine bestimmte Zahl von Wendepunkten besitzt**; deren Koordinaten erhält man durch Auflösen der Gleichungen (6) nach x, y; die Wendepunkte können als die Schnitte der Kurven (6) und (1) konstruiert werden.

Schließlich sei bemerkt: Wenn man in (5) x, y als gegeben ansieht, so stellt sie in den Koordinaten x_0, y_0 eine Kurve $\varDelta$ dar, auf der die Berührungspunkte der von dem Punkte $P(x, y)$ an die Kurve Γ gezogenen Tangenten liegen; diese Berührungspunkte sind also die Schnitte von Γ mit $\varDelta$. Somit ist auch die Aufgabe von einem Punkte, an eine Kurve die Tangenten zu ziehen, zurückgeführt auf die Bestimmung der Schnittpunkte der Kurve mit einer anderen bestimmten Kurve; im Falle, daß die gegebene Kurve ein Kegelschnitt, ist bekanntlich die Hilfskurve die Polare des gegebenen Punktes.

179. Die vorigen Formeln vereinfachen sich in bemerkenswerter Weise, wenn, was häufig der Fall ist, die Gl. (3) nach y aufgelöst ist, also die Form hat:

$$y = \varphi(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

In diesem Falle wird nämlich die Gleichung der Tangente

$$y - y_0 = (x - x_0) \cdot \varphi'(x_0), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

während die Bedingung für einen Wendepunkt lautet

$$\varphi''(x_0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

Diese Formeln führen dann leicht zu einer wichtigen Folgerung.

Es sei $P(x_0 + k,\ y_0 + h)$ ein dem Punkte P_0 benachbarter Punkt der gegebenen Kurve; dann wird sein Abstand δ von der Geraden (5′) gegeben durch

$$\delta = \frac{k - h\varphi'(x_0)}{\sqrt{1 + \varphi'(x_0)^2}};$$

nun ist aber wegen Gl. (3′)

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad y_0 + k = \varphi(x_0 + h);$$

daher

$$k = h\varphi'(x_0) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x_0) + \cdots$$

und

$$\delta = \frac{\frac{h^2}{2!}\varphi''(x_0) + \frac{h^3}{3!}\varphi'''(x_0) + \cdots}{\sqrt{1 + \varphi'(x_0)^2}}.$$

Dieser Ausdruck läßt erkennen, daß wenn $\varphi''(x_0) \neq 0$ ist, δ das Vorzeichen von $\varphi''(x_0)$ hat, welches auch das Vorzeichen von h sein möge; folglich **liegt in der Nachbarschaft eines generischen (gewöhnlichen) Punktes der Kurve diese ganz auf einer Seite der betreffenden Tangente.** Wenn hingegen $\varphi''(x_0) = 0$, aber $\varphi'''(x_0) \neq 0$, so ändert δ das Vorzeichen zugleich mit dem Vorzeichen von h und **folglich geht in einem Wendepunkte die Kurve von der einen Seite der Tangente auf die andere über.**[1])

180. Es ist zweckmäßig die allgemeine Gleichung der Tangente auch für den Fall aufzustellen, daß man von der betrachteten Kurve die parametrische Darstellung (1) kennt. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Verbindungslinie der beiden Punkte P und Q mit den Parametern t_0 und $t_0 + h$ (die **Sehne** PQ); ihre Gleichung ist

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \xi(t_0) & \eta(t_0) & 1 \\ \xi(t_0+h) & \eta(t_0+h) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$[x - \xi(t_0)]\,[\eta(t_0 + h) - \eta(t_0)] = [y - \eta(t_0)]\,[\xi(t_0 + h) - \xi(t_0)].$$

Nehmen wir der Allgemeinheit wegen an, daß im Punkte P einige der Ableitungen der Funktionen ξ, η gleich Null werden, und genauer, daß $\xi^{(m)}(t_0)$ und $\eta^{(n)}(t_0)$ die ersten Ableitungen seien, die nicht Null sind,[2]) so ist

$$\xi(t_0 + h) - \xi(t_0) = \frac{h^m}{m!}\,\xi^{(m)}(t_0) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!}\,\xi^{(m+1)}(t_0) + \cdots$$

$$\eta(t_0 + h) - \eta(t_0) = \frac{h^n}{n!}\,\eta^{(n)}(t_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\,\eta^{(n+1)}(t_0) + \cdots.$$

Setzen wir dies in die vorige Gleichung ein, dividieren die entstandene Beziehung durch die höchste Potenz von h, die als Faktor auftritt, und lassen dann $h = 0$ werden, so erhalten wir beim Grenzübergang

$$\left.\begin{array}{lll} y - \eta(t_0) = 0, & \text{im Falle} & m < n \\ \dfrac{x - \xi(t_0)}{\xi^{(m)}(t_0)} = \dfrac{y - \eta(t_0)}{\eta^{(n)}(t_0)}, & \quad\text{„} \quad \text{„} & m = n \\ x - \xi(t_0) = 0, & \quad\text{„} \quad \text{„} & m > n \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

Im ersten Falle ist die Tangente parallel zur x-Achse, im dritten

1) Ganz allgemein: Hat man $\varphi''(x_0) = 0$, $\varphi'''(x_0) = 0 \ldots \varphi^{(m-1)}(x_0) = 0$, $\varphi^{(m)}(x_0) \neq 0$, *so liegt die Kurve ganz auf einer Seite der Tangente, wenn m ungerade ist, sie geht aber von der einen Seite auf die andere, wenn m gerade ist.*

2) Es ist leicht einzusehen, daß die ganzen Zahlen m, n endlich sind, wenn ξ, η keine Konstanten sind.

zur y-Achse. Der häufigste Fall entspricht der Annahme $m = n$; alsdann wird die Tangente dargestellt durch die Gleichung

$$\frac{x - \xi(t_0)}{\xi^{(n)}(t_0)} = \frac{y - \eta(t_0)}{\eta^{(n)}(t_0)},$$

oder

$$\begin{vmatrix} x - \xi(t_0) & \eta - y(t_0) \\ \xi^{(n)}(t_0) & \eta^{(n)}(t_0) \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

während

$$[x - \xi(t_0)]\xi^{(n)}(t_0) + [y - \eta(t_0)]\eta^{(n)}(t_0) = 0$$

die entsprechende Normale darstellt; **für das Vorhandensein solcher Geraden wird also verlangt, daß für den betrachteten Punkt, die Ableitungen der beiden Funktionen ξ, η,** die die parametrische Darstellung der Kurve liefern, bis in einer gewissen Ordnung im betrachteten Punkte **vorhanden sind**.

Mittels der parametrischen Darstellung kann man auch die Aufsuchung der Wendepunkte ausführen. Hat nämlich für $t = t_0$ die Kurve (1) einen Wendepunkt mit $Ax + By + C = 0$ als Wendetangente, so muß die Gleichung

$$A\xi(t) + B\eta(t) + C = 0$$

eine dreifache Wurzel $t = t_0$ haben. Es muß demnach sein

$$\begin{aligned} A\xi(t_0) + B\eta(t_0) + C &= 0, \\ A\xi'(t_0) + B\eta'(t_0) \qquad &= 0, \\ A\xi''(t_0) + B\eta''(t_0) \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Eliminieren wir A, B, C, so wird

$$\begin{vmatrix} \xi'(t_0) & \eta'(t_0) \\ \xi''(t_0) & \eta''(t_0) \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Diese Gleichung für t_0 dient zur Bestimmung der Parameterwerte, die den Wendepunkten entsprechen.

Zur Übung: Um zu erkennen, ob die betrachtete Kurve im Punkte (t_0) die zugehörige Tangente überschreitet oder nicht, betrachte man die Reihe

$$\begin{vmatrix} \xi^{(r+k)}(t_0) & \eta^{(r+k)}(t_0) \\ \xi^{(r)}(t_0) & \eta^{(r)}(t_0) \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2 \ldots)$$

und suche das erste ihrer Elemente auf, das zu 0 wird; es sei dieses das dem $k = s$ entspricht, dann überschreitet die Kurve, wenn $r + s$ ungerade ist, und nur dann.

181. Wir nehmen wieder die Gl. (4), lassen aber die Bedingung fallen, daß die beiden ersten Ableitungen nicht gleich Null seien. Wir wollen vielmehr annehmen, daß für den Punkt (x_0, y_0) alle partiellen Ableitungen bis zur $(r-1)^{\text{ten}}$ inklusive verschwinden $(r > 1)$, daß jedoch mindestens eine der r^{ten} Ordnung von Null verschieden sei.

Das erste Glied der Gl. (4) beginnt dann mit ϱ^r, und daher wird jede durch P_0 gezogene Gerade die Kurve in r mit P_0 zusammenfallenden Punkten schneiden. In diesem Falle sagt man, **daß P ein r-facher Punkt** der Kurve sei, oder daß r Zweige der Kurve durch ihn hindurchlaufen. Damit P_0 ein r-facher Punkt sei, müssen seine Koordinaten, also $1 + 2 + 3 + \cdots (r-1) + r = \frac{r(r+1)}{2}$ Bedingungsgleichungen genügen. Angenommen, daß diesen Genüge geleistet sei, so kann man versuchen, durch P_0 eine Gerade g zu ziehen, derart daß mit P_0 nicht nur r, sondern $r+1$ Punkte der Kurve zusammenfallen; hierzu ist notwendig und hinreichend sie so zu legen, daß auch der Koeffizient von ϱ^r in Gl. (4) verschwindet, also sei

$$\sum_{i=0}^{i=r} \binom{r}{i} \left(\frac{\partial^r f(x,y)}{\partial x^{r-i} \cdot \partial y^i}\right)_0 \cos^{r-i}\alpha \cdot \cos^i \beta = 0\,,$$

oder auch, da $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

$$\sum_{i=0}^{i=r} \binom{r}{i} \left(\frac{\partial^r f(x,y)}{\partial x^{r-i} \cdot \partial y^i}\right)_0 \operatorname{tg}^i \alpha = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Da diese Gleichung von r^{ten} Grade für $\operatorname{tg}\alpha$ ist, so erkennt man, daß es im allgemeinen r Geraden gibt, die der obigen Bedingung genügen, jedoch werden nicht immer alle reell und voneinander verschieden sein; jede dieser Geraden ist Tangente an einen der r Kurvenzweige, die durch P_0 hindurchgehen und die übrigen Zweige schneiden. Solche Geraden betrachtet man als **Tangenten an die Kurve in P_0**, und man sagt, **daß eine Kurve in einem r-fachen Punkte auch r Tangenten besitze.**

Der einfachste Fall eines vielfachen Punktes ist der, daß $r = 2$; alsdann bestehen die drei Gleichungen

$$f(x_0, y_0) = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0\,, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Der Punkt (x_0, y_0) ist dann ein Doppelpunkt der betrachteten Kurve, und die beiden Tangenten haben die durch die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y}\right)_0 \operatorname{tg}\alpha + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \operatorname{tg}^2 \alpha = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

bestimmten Neigungen. Da die Gleichungen (10) zu drei an der Zahl zwischen den zwei Größen x_0, y_0 bestehen müssen, so werden sie für eine beliebig gewählte Funktion f nicht zugleich bestehen können, mit anderen Worten: **Eine ebene Kurve besitzt im allgemeinen keine Doppelpunkte**, oder auch: **Kurven mit Doppelpunkten (insbesondere auch solche mit mehrfachen Punkten) sind spezieller Art.**

Da die Gl. (11) quadratisch für $\operatorname{tg}\alpha$ ist, so können die beiden Doppelpunktstangenten beide **reell und verschieden** sein, oder reell und **zusammenfallend**, oder **konjugiert imaginär**; entsprechend diesen drei Fällen ist der Doppelpunkt ein **Knotenpunkt**, eine **Spitze** oder ein **isolierter** Punkt[1]); diese drei Fälle sind charakterisiert durch

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \end{vmatrix} \lesseqgtr 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

182. Es wird nützlich sein, die Bedingungen für die Existenz eines Doppelpunktes auch für den Fall aufzustellen, daß die betrachtete Kurve parametrisch dargestellt ist. Zu dem Zwecke betrachten wir die beiden Punkte auf ihr P_0 und P_1 mit den Parameterwerten t_0 und t_1. Die Gleichung der Verbindungslinie lautet dann

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \xi(t_0) & \eta(t_0) & 1 \\ \xi(t_1) & \eta(t_1) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gerade ist im allgemeinen bestimmt; sie hört auf es zu sein, aber auch nur dann, wenn zu gleicher Zeit die Gleichungen bestehen

$$\xi(t_0) = \xi(t_1), \qquad \eta(t_0) = \eta(t_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

für $t_1 \neq t_0$; in diesem Falle gibt es zwei Zweige der Kurve, die sich in einem Doppelpunkte schneiden; folglich sind (13) die gesuchten Bedingungen, in diesem Falle läßt die Kurve zwei Geraden als Tangenten zu, die im allgemeinen dargestellt werden durch

$$\frac{x - \xi(t_i)}{\xi'(t_i)} = \frac{y - \eta(t_i)}{\eta'(t_i)}, \quad (i = 0,\ 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Würde jedoch

$$\xi'(t_i) = \cdots \xi^{(r-1)}(t_i) = \eta'(t_i) = \cdots \eta^{(r-1)}(t_i) = 0$$

sein, so müßte man im Nenner setzen $\xi^{(r)}(t_i)$ und $\eta^{(r)}(t_i)$.

Setzen wir nun $t_1 = t_0 + h$, so werden (13) zu

$$\xi(t_0 + h) - \xi(t_0) = 0, \qquad \eta(t_0 + h) - \eta(t_0) = 0,$$

und lassen wir nun h gegen Null konvergieren, so folgt

$$\xi'(t_0) = 0, \qquad \eta'(t_0) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

und dies sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß der dem Parameter t_0 entsprechende Punkt eine Spitze sei, der Richtungskoeffizient der Tangente, nämlich $\frac{\eta'(t_0)}{\xi'(t_0)}$, stellt sich in unbe-

1) Eine analoge Diskussion könnte man mit Gl. (8) anstellen und damit eine Klassifikation der r-fachen Punkte gewinnen: wir überlassen dies dem Leser.

stimmter Form dar, und hat im allgemeinen als wahren Wert $\frac{\eta''(t_0)}{\xi''(t_0)}$, und daher lautet die Gleichung der Tangente in der betrachteten Spitze im allgemeinen

$$\frac{x-\xi(t_0)}{\xi''(t_0)} = \frac{y-\eta(t_0)}{\eta''(t_0)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Wäre aber

$$\xi''(t_0) = \cdots = \xi^{(r-1)}(t_0) = \eta''(t_0) = \cdots = \eta^{(r-1)}(t_0) = 0,$$

so müßte man bzw. als Nenner nehmen $\xi^{(r)}(t_0)$ und $\eta^{(r)}(t_0)$.

183. Der Winkel, der von den beiden Tangenten in den Punkten P und Q einer Kurve gebildet wird, gibt uns die Abweichung der Kurve von der geraden Richtung auf die Länge des Bogens PQ. Das Verhältnis des Kreisbogens vom Radius 1, der zu jenem Winkel gehört, zu dem Bogen PQ der Kurve heißt die **mittlere** Krümmung der Kurve. Wenn Q dem Punkte P unendlich nahe rückt, so strebt dieses Verhältnis einem Grenzwerte zu, von dem wir zeigen wollen, daß er im allgemeinen endlich und bestimmt ist, und den wir die Krümmung der Kurve im Punkte P nennen. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, daß die Kurve Γ durch die parametrische Darstellung (1) gegeben sei, und daß auf Γ außer dem Punkte P mit dem Parameter t noch der benachbarte P' mit dem Parameter $t+h$ betrachtet werde. Die Tangenten p und p' in P und P' haben dann die Gleichungen

$$\frac{x-\xi(t)}{\xi'(t)} = \frac{y-\eta(t)}{\eta'(t)}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{x-\xi(t+h)}{\xi'(t+h)} = \frac{y-\eta(t+h)}{\eta'(t+h)},$$

daher ist

$$\sin(\sphericalangle pp') = \frac{\begin{vmatrix} \xi'(t) & \eta'(t) \\ \xi'(t+h) & \eta'(t+h) \end{vmatrix}}{\sqrt{\xi'(t)^2 + \eta'(t)^2} \cdot \sqrt{\xi'(t+h)^2 + \eta'(t+h)^2}}$$

$$= \frac{h \begin{vmatrix} \xi'(t) & \eta'(t) \\ \xi''(t+\theta h) & \eta''(t+\vartheta h) \end{vmatrix}}{\sqrt{\xi'(t)^2 + \eta'(t)^2} \cdot \sqrt{\xi'(t+h)^2 \cdot \eta'(t+h)^2}},$$

worin θ und ϑ zwischen 0 und 1 gelegene Größen bedeuten. Rückt nun P' dem P unendlich nahe, so geht der Winkel (pp') in seinen Sinus über, während die Strecke $PP' = \sqrt{\overline{\xi(t+h)-\xi(t)}^2 + \overline{\eta(t+h)-\eta(t)}^2}$ $= h\sqrt{\xi'(t+\theta h)^2 + \eta'(t+\vartheta h)^2}$ in das Differential des Kurvenbogens s übergeht; also haben wir für die Grenze $h = 0$

$$\frac{\sphericalangle pp'}{ds} = \frac{\begin{vmatrix} \xi'(t) & \eta'(t) \\ \xi''(t) & \eta''(t) \end{vmatrix}}{\{\xi'(t)^2 + \eta'(t)^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Damit ist das Vorhandensein eines solchen Grenzwertes nachgewiesen und zugleich sein Wert gefunden. Der reziproke Wert dieses

Ausdruckes heißt der **Krümmungsradius** der Kurve im Punkte P; bezeichnen wir ihn mit R, so können wir schreiben

$$R = \frac{\left\{ \overline{\xi'(t)}^2 + \overline{\eta'(t)}^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\begin{vmatrix} \xi'(t) & \eta'(t) \\ \xi''(t) & \eta''(t) \end{vmatrix}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\mathbf{17})$$

Aus (8) und (17) ergibt sich durch bloße Vergleichung, **daß in einem Wendepunkte der Krümmungsradius unendlich groß ist.**

Im Falle die Kurve durch eine Gleichung von der Form $y = \varphi(x)$ dargestellt ist, reduziert sich Gl. (17) auf

$$R = \frac{\left\{ 1 + \overline{\varphi'(x)}^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\varphi''(x)} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad \ldots \ldots \quad (\mathbf{17'})$$

Nehmen wir hingegen als unabhängige Variable die Bogenlänge s, so haben wir

$$\frac{ds}{dt} = 1, \quad \text{d. h.} \quad \overline{\xi'(t)}^2 + \overline{\eta'(t)}^2 = 1$$

und Gl. (17) wird dann zu

$$\frac{1}{R} = \xi'(s) \cdot \eta''(s) - \xi''(s) \cdot \eta'(s) \quad \ldots \ldots \quad (\mathbf{17''})$$

Ist schließlich Γ durch die allgemeine Gleichung $f(x, y) = 0$ dargestellt, so erhält man durch Differentiation nach x

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0.$$

Nimmt man hieraus die Werte von y', y'' und setzt sie in (17') ein, so erhält man

$$R = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} : \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} \quad \ldots \ldots \quad (\mathbf{18})$$

Aus den obigen Formeln läßt eine wichtige Folgerung ziehen, die sich im folgenden als nützlich erweisen wird. Nehmen wir an, es sei der Krümmungsradius als eine gegebene Funktion der Bogenlänge s gegeben, also $R = f(s)$, so behaupten wir, **daß dadurch die Kurve ihrer Gestalt und Größe nach gegeben ist.** Um dies zu zeigen, greifen wir auf (17'') zurück. Der Parameter t ist nun die Bogenlänge s und die Funktionen ξ und η drücken die Koordinaten x und y aus; wir können daher schreiben

$$f(s) = \frac{ds^3}{dx \cdot d^2 y - dy \cdot d^2 x},$$

indem wir uns vorstellen, daß x und y Funktionen von s sind, die noch zu bestimmen sind. Da nun

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

oder

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1,$$

so wird

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} = 0$$

sein. Daher ist

$$d^2x = -\frac{dy \cdot d^2y}{dx},$$

und folglich

$$f(s) = \frac{dx \cdot ds}{d^2y} = \frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}{\frac{d^2y}{ds^2}}.$$

Setzt man nun $\frac{dy}{ds} = p$, so ist $\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{dp}{ds}$, und daher wird die vorige Gleichung

$$f(s) = \frac{\sqrt{1 - p^2}}{\frac{dp}{ds}},$$

oder auch

$$\frac{dp}{\sqrt{1 - p^2}} = \frac{ds}{f(s)},$$

und wenn wir integrieren

$$\text{arc sin } p = \int \frac{ds}{f(s)}.$$

Setzen wir zur Abkürzung $\varphi = \int \frac{ds}{f(s)}$, so ist φ bis auf eine additive Konstante bestimmt, und die gefundene Gleichung liefert uns

$$p = \sin \varphi, \quad \sqrt{1 - p^2} = \cos \varphi,$$

und alsdann

$$dx = \sqrt{ds^2 - dy^2} = ds \sqrt{1 - p^2} = \cos \varphi \cdot ds, \quad x = \int \sin \varphi \cdot ds.$$

Wir schließen hieraus

$$x = \int ds \cdot \cos \int \frac{ds}{f(s)}, \quad y = \int ds \cdot \sin \int \frac{ds}{f(s)} \quad . \quad . \quad . \quad \textbf{(19)}$$

und diese Formeln geben uns die parametrische Darstellung der Kurve. Es ist leicht einzusehen, daß von den drei durch die Integration auftretenden Konstanten nur die Lage, nicht die Gestalt der erhaltenen Kurve abhängt. Damit ist unsere Behauptung bewiesen, und die Kurve in ihrer Allgemeinheit individualisiert.

§ 2 Kurven als Enveloppen von Geraden.

184. Wir haben gesehen, daß, wenn eine Kurve als geometrischer Ort von ∞^1 Punkten gegeben ist, dadurch eine kontinuierliche Reihe von ∞^1 Geraden bestimmt ist, die alle die Tangenten an die Kurve bilden. Man kann diese auffassen als die Verbindungslinien zweier aufeinander folgender unendlich naher Punkte der Kurve; infolgedessen stellt sich jeder Kurvenpunkt dar als der Schnitt der zugehörigen Tangente mit der zunächst folgenden. Jetzt wollen wir umgekehrt in einer Ebene eine Reihe von ∞^1 Geraden betrachten; jede von ihnen kann dargestellt werden durch eine lineare Gleichung in kartesischen Koordinaten, deren Koeffizienten reelle Größen sein sollen, jedoch nicht konstante, sondern veränderliche, etwa Funktionen der Zeit t oder eines anderen Parameters, also

$$\varphi(t)\cdot x + \psi(t)\cdot y + \chi(t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Betrachten wir nun die beiden Geraden g und g' dieser Reihe, die den benachbarten Werten t und $t + h$ des Parameters entsprechen, also

$$\varphi(t)\cdot x + \psi(t)\cdot y + \chi(t) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(t+h)\cdot x + \psi(t+h)\cdot y + \chi(t+h) = 0 \quad (2)$$

so werden sich diese in einem Punkte schneiden, dessen Koordinaten man erhält, wenn man (2) nach x und y auflöst. Subtrahiert man die beiden Gleichungen von einander, so wird

$$[\varphi(t-h) - \varphi(t)]\cdot x + [\psi(t+h) - \psi(t)]\cdot y + [\chi(t+h) - \chi(t)] = 0,$$

oder

$$\varphi'(t+\theta_1 h)\cdot x + \psi'(t+\theta_2 h)\cdot y + \chi'(t+\theta_3 h) = 0,$$

wobei $0 \leqq \theta_k \leqq 1$ $(k = 1, 2, 3)$. Läßt man h gegen 0 konvergieren, so geht dies Gleichung über in

$$\varphi'(t)\cdot x + \psi'(t) y + \chi'(t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und diese zeigt uns, unter der Annahme, daß die Ableitungen der Funktionen φ, ψ, χ existieren, daß der Punkt gg', wenn g' sich der g unendlich nähert, einer im allgemeinen bestimmten Lage zustrebt, dessen Koordinaten man erhält, wenn man die Gleichungen (2) und (3) nach x und y auflöst; dieser Punkt heißt der *Berührungspunkt* der Geraden g mit seiner Enveloppe. Durch die Elimination entstehen zwei Gleichungen vom Typus

$$x = \xi(t), \qquad y = \eta(t),$$

und diese stellen bei Variierung von t eine Kurve als Punktort dar, an welche, wie eine leichte Rechnung zeigt, die gegebenen Geraden in der Tat Tangenten sind. Somit besteht der zu Anfang dieser Nr. aufgestellte Satz zu Recht, **daß mit einer kontinuierlichen Reihe von ∞^1 Geraden eine Reihe von ∞^1 Punkten verknüpft ist.** Man kann also jede ebene Kurve von zwei zu einander dualen Gesichtspunkten aus betrachten, nämlich **als geometrischen Ort ihrer Punkte** und als

Enveloppe ihrer Tangenten. Infolgedessen stellen sich ihre Eigenschaften paarweise dar; man erhält den Ausdruck der einen, wenn man auf die andere das Prinzip der Dualität in der Ebene anwendet.

Machen wir einige Anwendungen dieser Herleitungsmethode. Einem vielfachen Punkte der Kurve (in welchem sie also mehrere Tangenten hat) entspricht eine **mehrfache Tangente**, d. h. eine Gerade, die die Kurve in mehreren Punkten berührt; insbesondere entsprechen den Knotenpunkten, Spitzen und isolierten Punkten die Doppeltangenten mit zwei getrennten reellen Berührungspunkten, mit zwei aufeinander folgenden (das sind die Inflexions- oder Wendepunkts-Tangenten) und mit zwei imaginären Berührungen. Der Spitze entspricht also die Wendetangente, und da diese die Kurve in drei aufeinanderfolgenden Punkten schneidet, so **kann eine Spitze aufgefaßt werden als Punkt, in dem drei aufeinanderfolgende Tangenten sich treffen.** Da eine Kurve als Punktort im allgemeinen Wendepunkte hat, aber keine vielfachen, so **muß eine Enveloppe im allgemeinen auch Spitzen haben, aber keine Doppeltangenten,** usw.

185. Bevor wir solche Betrachtungen verlassen, wollen wir noch einige nützliche Folgerungen aus dem Vorigen ziehen. Wir nehmen wieder die durch

$$x = \xi(t), \quad y = \eta(t)$$

dargestellte Kurve; die Normale in einem beliebigen Punkte hat die Gleichung

$$[x - \xi(t)] \cdot \xi'(t) + [y - \eta(t)] \cdot \eta'(t) = 0.$$

Die Enveloppe aller dieser Normalen wird erhalten, wenn wir diese Gleichung mit ihrer Ableitung nach t kombinieren, also

$$[x - \xi(t)] \cdot \xi''(t) + [y - \eta(t)] \cdot \eta''(t) = \overline{\xi'(t)}^2 + \overline{\eta'(t)}^2.$$

Man findet hieraus

$$x = \xi(t) - \frac{\eta'(t)\left[\overline{\xi'(t)}^2 + \overline{\eta'(t)}^2\right]}{\xi'(t)\eta''(t) - \xi''(t)\eta'(t)}, \quad y = \eta(t) + \frac{\xi'(t)\left[\overline{\xi''(t)}^2 + \overline{\eta'(t)}^2\right]}{\xi'(t)\eta''(t - \xi''(t)\eta'(t)}.$$

als analytische Darstellung für die von den Normalen eingehüllte Kurve, welche die Evolute der gegebenen Kurve heißt, während diese die Evolvente der ersteren genannt wird.. Zufolge Gl. (17) kann man auch schreiben

$$x = \xi(t) - \frac{R \cdot \eta'(t)}{\sqrt{\overline{\xi'(t)}^2 + \overline{\eta'(t)}^2}}, \quad y = \eta(t) + \frac{R \cdot \xi'(t)}{\sqrt{\overline{\xi'(t)}^2 + \overline{\eta'(t)}^2}}.$$

Hieraus folgt: **Jedem Punkte P der gegebenen Kurve entspricht ein Punkt O der Evolute, der auf der entsprechenden Normalen liegt in einem Abstande von jenem gleich dem Krümmungsradius.**

O heißt das Krümmungszentrum der Kurve in P, und der mit OP um O beschriebene Kreis der Krümmungs- oder Oskula-

tionskreis der Kurve im Punkte P. Für jede Kurve kann man durch eine besondere Konstruktion das Krümmungszentrum erhalten.

§ 3. Algebraische Kurven.

186. Läßt sich eine Kurve durch eine algebraische (ganze rationale) Gleichung zwischen den kartesischen Koordinaten ihrer Punkte darstellen,

$$f(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

so heißt die Kurve algebraisch, im anderen Falle transzendent. Im ersten Falle setze man

$$x = \varphi(t, u), \quad y = \chi(t, u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wo φ und ψ zwei rationale, im allgemeinen gebrochene Funktionen bedeuten. Dann wird die Kurvengleichung (1) zu

$$f(\varphi(t, u), \ \chi(t, u)) = 0, \ \text{oder} \ F(t, u) = 0.$$

Hieraus geht hervor: Jede algebraische Kurve kann durch zwei Gleichungen von der Form (2) dargestellt werden, wo φ und χ rationale Funktionen der Parameter t, u sind, die durch eine Gleichung $F(t, u) = 0$ miteinander verknüpft sind, wo wieder F ein ganzes rationales Polynom ist. Durch Projektion ergibt sich hieraus, daß auch die sämtlichen Erzeugenden eines algebraischen Kegels einer ebensolchen Darstellung fähig sind.

Ist die Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

vom Grade n, so hat diese Zahl eine wichtige geometrische Bedeutung, die leicht nachzuweisen ist. Betrachten wir nämlich die Gleichung (4) in Nr. 178, so endet sie mit dem Gliede n; d. h. (4) ist eine algebraische Gleichung n-ter Ordnung, hat also n Wurzeln. Daraus folgt: **Γ wird von allen Geraden ihrer Ebene in n Punkten geschnitten.** Man drückt dies so aus, daß man sagt, Γ ist von der Ordnung n, so daß also die Ordnung einer algebraischen Kurve die Anzahl der Schnitte bedeutet, die sie mit einer beliebigen Geraden ihrer Ebene hat.[1]) Insbesondere schneidet auch die unendlich ferne Gerade der Ebene eine Kurve n^{ter} Ordnung in n Punkten, die nicht alle verschieden und reell zu sein brauchen. Jedem reellen unendlich fernen Punkte entspricht ein unendlicher Kurvenzweig. Die Kurve kann auch in einem solchen Punkte die unendlich ferne Gerade berühren, oder dort eine reelle endliche Tangente haben eine sog. Asymptote; im ersten Falle haben wir einen **parabolischen**, im zweiten einen **hyperbolischen** Kurvenzweig.

---

1) Würde die Gl. (4) in Nr. 178 durch $n + 1$ Werte von ϱ befriedigt werden, so würde sie sich auf eine Identität reduzieren; g würde dann Γ in unendlich vielen Punkten schneiden, und daher würde Γ in die Gerade g und eine Kurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfallen.

Wenden wir auf den Begriff der Ordnung das Dualitätsprinzip an, so können wir sagen: Die Klasse einer algebraischen Kurve ist die Zahl der Tangenten, die von einem beliebigen Punkte der Ebene an sie gehen. Um zu zeigen, daß diese Zahl bestimmt und endlich ist, nehmen wir beliebig einen Punkt $O(a, b)$ und bezeichnen mit $P(x, y)$ einen Punkt der Kurve (2) derart, daß die Tangente in ihm durch O geht. Alsdann bestehen die Gleichungen:

$$f(x, y) = 0; \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}(y - b) = 0,$$

die zur Bestimmung der Koordinaten von P dienen können; da diese nun ein bestimmtes System algebraischer Gleichungen bilden, so lassen sie nur eine endliche, von a und b unabhängige, Zahl von Lösungen zu. Somit kann P nur eine endliche Zahl von Lagen haben, und damit ist die Zahl der von O ausgehenden Tangenten endlich, w. z. b. w. **Ordnung und Klasse einer algebraischen Kurve werden durch Projektion von einem Punkte aus auf eine Ebene nicht zerstört.**[1])

In dem Falle, daß Γ algebraisch ist, sind auch die Gl. (1), (6) in Nr. 176 beide algebraisch und besitzen eine endliche Zahl von Lösungen. **Folglich hat eine algebraische Kurve, als geometrischer Ort betrachtet, eine endliche Zahl von Wendepunkten;** Dual: **als Enveloppe betrachtet, hat sie eine endliche Zahl von Spitzen.**

187. Zwei algebraische Kurven von den Ordnungen n_1 und n_2 haben im allgemeinen $n_1 \cdot n_2$ Punkte gemeinsam, indem ihre Gleichungen, wie aus der Algebra bekannt ist, $n_1 \cdot n_2$ Lösungen zulassen. Dual: **Zwei algebraische Kurven von der Klasse ν_1 und ν_2 haben im allgemeinen $\nu_1 \cdot \nu_2$ gemeinsame Tangenten.**

Ordnen wir die Gleichung einer algebraischen Kurve n-ter Ordnung nach fallenden Potenzen der Variabeln, so erhalten wir ein Resultat von der Form:

$$f_n + f_{n-1} + f_{n-2} + \cdots + f_1 + f_0 = 0;$$

darin bedeutet f_r einen Ausdruck von der Form

$$a_0 x^r + a_1 x^{r-1} y + \cdots a_{r-1} x y^{r-1} + a_r y^r.$$

Hieraus geht hervor, daß die linke Seite

$$(n + 1) + n + (n - 1) + \cdots + 3 + 2 + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Koeffizienten enthält. Da man nun die Gleichung durch einen konstanten Faktor (der nicht 0 oder ∞ ist) dividieren kann, so reduziert

---

1) Für die transzendenten Kurven hingegen könnte man nur sagen, daß die Anzahl der (reellen) Schnitte mit einer bestimmten Geraden und die Zahl der von einem bestimmten Punkte ausgehenden (reellen) Tangenten durch Projektion nicht geändert wird.

sich diese Zahl auf $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ Konstanten. Soll nun der Punkt (x_0, y_0) der Kurve angehören, so müssen die Koeffizienten von f der linearen Gleichung $f(x_0, y_0) = 0$ gehorchen; demnach kann man einer derartigen Bedingung im allgemeinen nur $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte unterwerfen, aber nicht mehr. Durch diese gegenseitigen Beziehungen werden dann die Koeffizienten in der Regel eindeutig bestimmt sein. **Folglich ist eine algebraische Kurve von der Ordnung n im allgemeinen durch $\frac{n(n+3)}{2}$** (einfache) **Punkte, durch die sie hindurchgehen soll, bestimmt.** Dual: **Eine Kurve ν-ter Klasse ist durch $\frac{\nu(\nu+3)}{2}$ Geraden, die sie berühren soll, im allgemeinen bestimmt.** Wir sagen „im allgemeinen", weil es Ausnahmen gibt: z. B. 5 Punkte bestimmen einen Kegelschnitt, jedoch nicht, wenn 4 auf derselben Geraden liegen.

Da eine Kurve n-ter Ordnung durch $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ Konstanten bestimmt ist, und die Existenz eines r-fachen Punktes $\frac{r(r+1)}{2}$ Bedingungen gleichkommt, so muß $\frac{r(r+1)}{2} \leqq \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ sein und folglich $r \leqq n$. Demnach **kann eine algebraische Kurve n-ter Ordnung keinen Punkt von größerer Vielfachheit als n haben**; und durch Anwendung des Dualitätsgesetzes: **eine Kurve von der ν-ten Klasse kann keine Tangente von größerer Vielfachheit als r haben.** Jenes Maximum wird tatsächlich nur erreicht, wenn (und nur wenn) die Kurve in n durch einen Punkt gehende Geraden zerfällt, und dieses wenn (und nur wenn) sie aus ν auf einer Geraden gelegenen Punkten besteht.

§ 4. Beispiele ebener Kurven.

188. Die bisher gemachten allgemeinen Bemerkungen wollen wir durch einige Beispiele ebener Kurven illustrieren, die aus verschiedenen Gründen bemerkenswert sind, ohne uns bei den Kegelschnitten aufzuhalten, deren Kenntnis wir bei dem Leser voraussetzen. Der Kürze wegen, werden wir nur einige der bezüglichen Sätze anführen, indem wir es dem Leser überlassen, ihre Richtigkeit nachzuweisen und sie zu vervollständigen.[1])

Algebraische Kurven.

I. Gegeben ein Kreis mit dem Durchmesser $OO' = 2a$ (Fig. 49); jede beliebige durch O gezogene Gerade g schneidet die in O' an den

---

1) Die Beweise wie andere Beispiele und Ausführungen wird der Leser in dem Werke finden: G. Loria, *Spezielle algebr. und transz. ebene Kurven*, deutsch von F. Schütte. II. Aufl. (Leipzig 1910/11).

Kreis gezogene Tangente t in einem Punkte N und den Kreis zum zweiten Mal in M. Man trage auf g von O aus das Stück $OP = MN$ ab, dann beschreibt der Punkt P bei Rotation von g um O eine Linie, die man die **Kissoide** (des Diokles) nennt. Sie ist algebraisch, von der dritten Ordnung, hat O als Spitze, OO' als Spitzentangente, t als Wendeasymptote. Nimmt man O als Anfang, OO' als Abszissenachse, so findet man die Gleichung der Kurve als

$$x(x^2 + y^2) = 2ay^2.$$

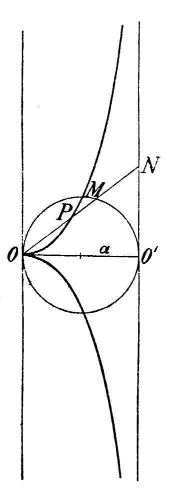


Fig. 49.

II. Gegeben zwei sich in O schneidende Geraden a, b und ein Punkt A auf a. Eine beliebige durch A gezogene Gerade g schneide b in B (Fig. 50); der mit OB um B beschriebene Kreis schneidet g in P und P', und diese Punkte beschreiben bei der Rotation von g um A eine algebraische Kurve dritter Ordnung, die man die **Strophoide** nennt und zwar gerade oder schiefe, je nachdem der Winkel $ab = \alpha$ ein rechter ist oder nicht. A ist ein einfacher, O ein Doppelpunkt der Kurve; nimmt man A als Anfang, a als x-Achse, so ist, wenn $AO = l$, die Gleichung der Kurve

Fig. 50.

$$(x^2 + y^2)(x \sin\alpha + y\cos\alpha - 2l\sin\alpha) + l^2(x\sin\alpha - y\cos\alpha) = 0.$$

III. Gegeben eine Reihe von Kreisen, die alle gleich groß sind, und ihren Mittelpunkt auf einer Geraden g haben; ferner ein Punkt O auf g. Der Ort der Berührungspunkte P der von O an die Kreise gezogenen Tangenten ist eine Kurve vierter Ordnung, die **Kappa-Kurve** genannt. Ihre Polargleichung lautet $\varrho = a \cdot \operatorname{ctg}\omega$ (Fig. 51).

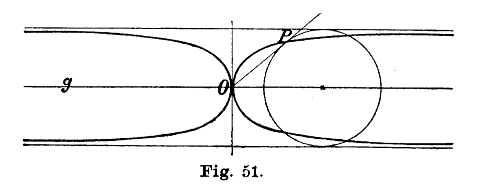


Fig. 51.

IV. Gegeben eine Gerade g und ein fester Punkt O im Abstande a von g, sowie eine Strecke l (Fig. 52). Auf sämtlichen durch O gehenden Strahlen t trage man von ihrem Schnittpunkte M mit der g aus nach beiden Seiten das Stück $MP = l$ ab. Der Ort der Punkte P ist dann eine Kurve vierter Ordnung, welche die **Konchoide** der Geraden (oder des Nikomedes) heißt. O ist Doppelpunkt, Spitze oder isolierter Punkt, je nachdem $l \gtreqless a$ ist. (S. in der Fig. 52 die Formen a, b, c.) Ist O Anfang und g die x-Achse, so lautet die Gleichung

$$(x - a)^2(x^2 + y^2) = l^2x^2.$$

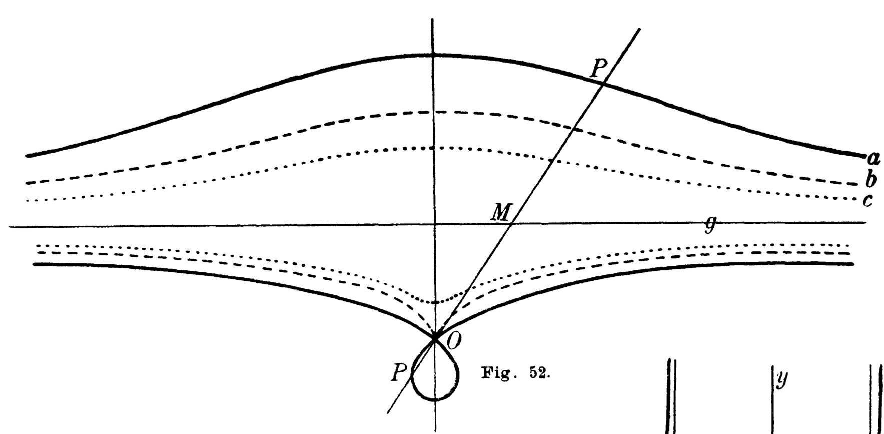


Fig. 52.

V. Ersetzt man die Gerade g in IV durch einen Kreis Γ mit dem Radius r, der durch den Punkt O geht, so erhält man eine Kurve, die eine spezielle **Konchoide des Kreises** ist, und ähnlich wie die gemeine Konchoide in ihrer Gestalt variiert, je nach dem Verhältnisse von l zu r (vgl. Fig. 53). Sie hat den Namen **Pascalsche Schnecke** erhalten, für den Fall $l = r$ jedoch den Namen **Kardioide**. Ihre Gleichung, sowie ihre Singularitäten abzuleiten, überlassen wir dem Leser.

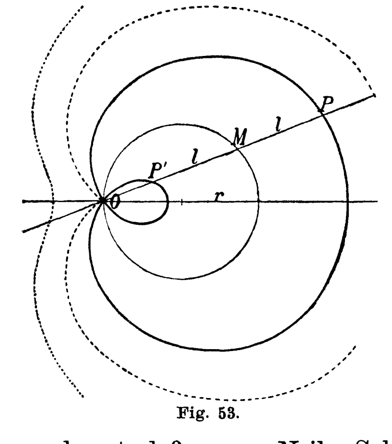


Fig. 53.

VI. Gegeben zwei zueinander senkrechte Geraden Ox und Oy, sowie auf der letzteren ein fester Punkt A (Fig. 54); eine Strecke MP von konstanter Länge b bewegt sich so, daß der eine Endpunkt M die Gerade Oy durchläuft und zwar derart, daß, wenn N ihr Schnitt mit Ox ist, immer $ON = AM$ bleibt; der andere Endpunkt P durchläuft dann eine Kurve, die von dem berühmten Maler A. Dürer erfunden, und von ihm als **Muschellinie** benannt ist. — Bezeichnen wir noch OA mit a, so wird ihre Gleichung

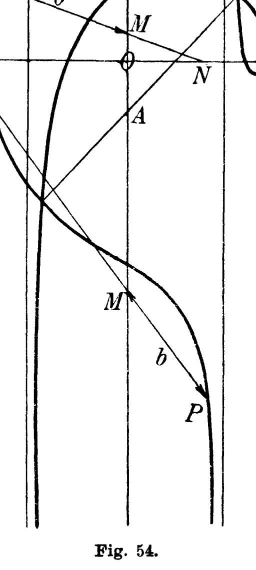


Fig. 54.

$$(xy + b^2 - x^2)^2 = (x + y - a^2)(a^2 - x^2).$$

Sie ist also von der vierten Ordnung, hat zwei auf der Geraden

$x + y = a$ liegende Doppelpunkte, von denen der eine auch Spitze oder isolierter Punkt sein kann. Die Fig. 54 entspricht dem ersten Falle.

VII. Bei manchen Fragen aus der Geometrie und der geometrischen Optik trifft man auf Kurven, die folgender analytischer Darstellung fähig sind

$$\mu'\sqrt{(x-a')^2+(y-b')^2}+\mu''\sqrt{(x-a'')^2+(y-b'')^2}=l;$$

im Falle $\mu' = \mu''$ sind es Kegelschnitte, jedoch für $\mu' \gtrless \mu''$ heißen sie **Cartesische Ovale** und sind von der 4ten Ordnung.

VIII. Eine Strecke von konstanter Länge l durchläuft mit ihren Endpunkten zwei aufeinander senkrechte Geraden OX und OY. Sie umhüllt dann eine Kurve 6ter Ordnung, die sogenannte **reguläre Astroide** (Fig. 55). Ihre Gleichung lautet

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}};$$

auf jeder der beiden Geraden hat sie zwei Spitzen, mit diesen als Doppelspitzentangenten. Wie sich die Verhältnisse ändern, wenn OX und OY nicht mehr senkrecht aufeinander stehen, möge der Leser ermitteln.

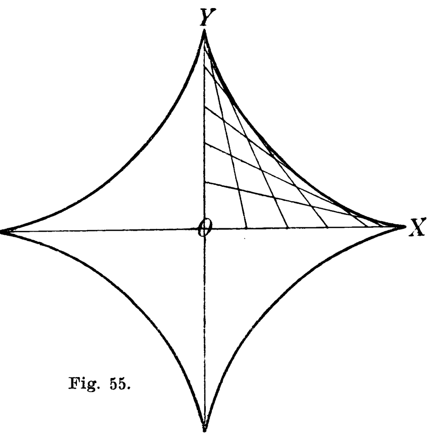
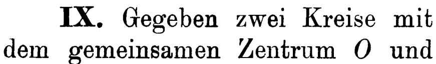


Fig. 55.



IX. Gegeben zwei Kreise mit dem gemeinsamen Zentrum O und den Radien c, und $d < c$, ferner ein Punkt G und eine Strecke l (Fig. 56). Eine beliebige durch O gehende Gerade t schneide die beiden Kreise in C und D; die Gerade CG wird von dem um C mit l beschriebenen Kreise in zwei Punkten P geschnitten, die, wenn man t variiert, eine Kurve sechster Ordnung beschreiben, **Kranioide** genannt. Ist O Anfang, OG die y-Achse, so haben, wenn wir $\overline{OG}$ mit g bezeichnen, die Gerade OC und der um D beschriebene Kreis bzw. die Gleichungen

$$(c \sin\varphi - g)x - c\cdot\cos\varphi\cdot y + cg\cdot\cos\varphi = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2d(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + d^2 - l^2 = 0.$$

Durch Elimination von φ aus diesen beiden Gleichungen erhält man die Gleichung der Kranioide. — Lassen wir gleichzeitig die Strecken d und l unendlich groß werden, so ist OP nichts anderes als das in O auf dem Radius OC errichtete Lot (s. Fig. 57), und die Kurve wird dann von der vierten Ordnung, heißt **Capricornoide** und hat die Gleichung

$$\frac{(x^2+y^2-gx)^2}{x^2+y^2} - \frac{g^2y^2}{c^2} = 0.$$

In dem noch spezielleren Falle $g = c$ wird sie zur geraden Strophoide (vgl. II).

X. Bezeichnen wir mit ϱ, ω

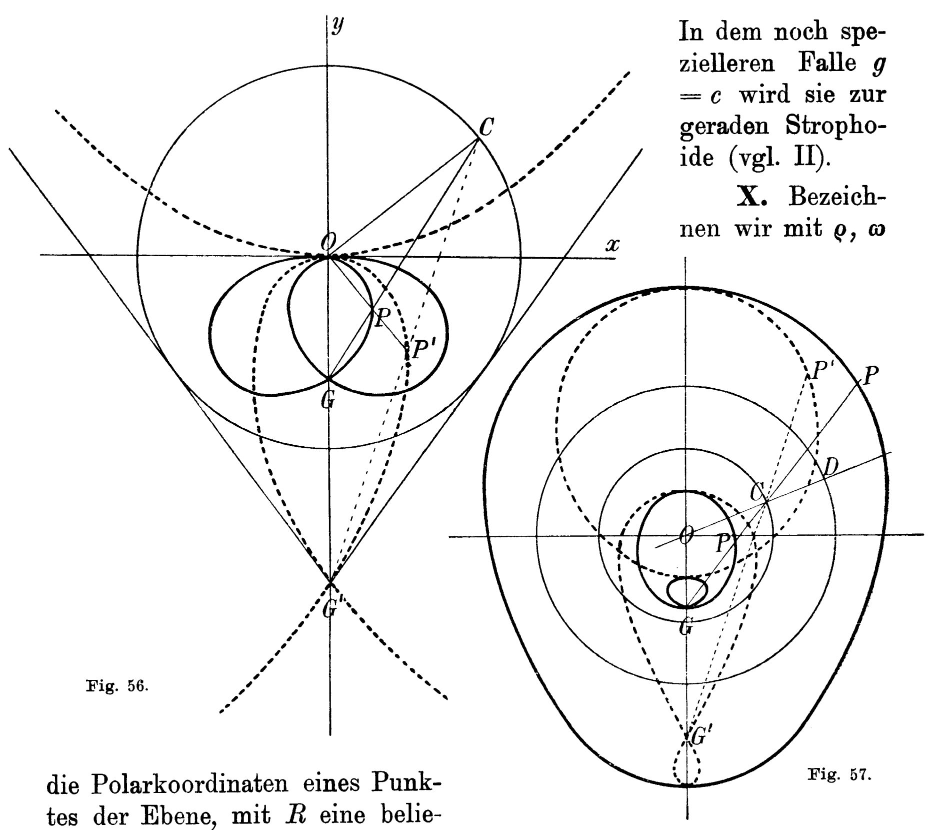


Fig. 56.

Fig. 57.

die Polarkoordinaten eines Punktes der Ebene, mit R eine beliebige feste Strecke und mit μ eine beliebige reelle Zahl, so stellt die Gleichung

$$\varrho = R \cdot \sin \mu \omega$$

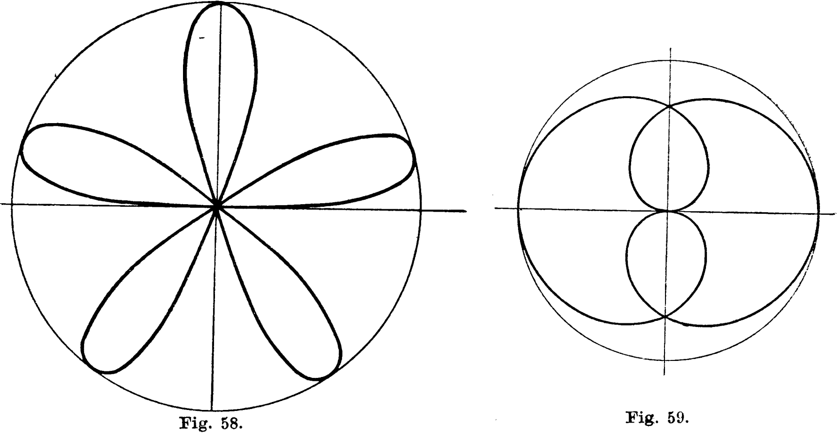


Fig. 58.

Fig. 59.

eine ganze Familie von Kurven dar, genannt **Rhodoneen** oder Rosenkurven, die alle den Pol als vielfachen Punkt haben, und die alge-

braisch oder transzendent sind, jenachdem μ rational ist, oder nicht. Ist μ ganzzahlig, so besteht die Kurve aus μ oder 2μ getrennten Blättern, wie in Fig. 58, welche den Fall $\mu = 5$ darstellt; ist μ gebrochen, so hat die Kurve verschiedene Formen von denen Fig. 59 den Fall $\mu = \frac{1}{2}$ darstellt. Wir empfehlen dem Leser die Kurve für noch andere Werte von μ zu zeichnen und zu diskutieren.

XI. In ähnlicher Weise stellen die Kurven $\varrho = R \cdot \operatorname{tg} \mu\omega$ im Falle, daß μ rational ist, algebraische Kurven dar, die eine große Mannigfaltigkeit in der Gestalt darbieten, und die **Knotenkurven** genannt werden. Im einfachsten Falle $\mu = 1$ erhalten wir die Kappakurve (vgl. Nr. III), für $\mu = 2$ erhalten wir die **Windmühle**, die aus vier unendlichen sich im Anfange schneidenden Zügen besteht.

XII. Haben ϱ, ω, μ dieselbe Bedeutung wie vorhin, und ist e eine Konstante, p eine beliebige Strecke, so stellt die Gleichung

$$\varrho = \frac{p}{1 + e \cos \mu\omega}$$

eine ganze Familie von Kurven dar, die für $\mu = 1$ die Kegelschnitte sind, und im allgemeinen **Kurven mit μ Bäuchen** genannt werden. Wenn $|e| \geqq 1$, und nur dann besitzt die Kurve unendliche Zweige. Die entsprechenden Kurven zu zeichnen für verschiedene Werte von μ, sowie mit der Unterscheidung von $|e| \gtreqqless 1$, möge eine Übung für den Leser sein.

Transzendente Kurven.

189. I. Bezeichnen wir mit a und b zwei beliebige Strecken, so stellt die Gleichung

$$y = b \sin \frac{x}{a}$$

die sogenannte **Sinuslinie** dar. Sie schneidet die x-Achse in unendlich vielen Punkten, nämlich in allen denjenigen, für welche $x = k\pi a$, wo k eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet; alle diese Punkte sind Wendepunkte. Da $\left|\sin \frac{x}{a}\right| \leqq 1$, so liegen alle Punkte innerhalb des von den beiden Geraden $y = \pm b$ begrenzten Streifens. Die Kurve berührt diese beiden Geraden in allen Punkten, für welche $x = k\frac{\pi a}{2}$ ist, usw. — Daß die Kurve $y = b \cos \frac{x}{a}$ **(Kosinuslinie)** mit der vorigen identisch ist, erkennt man daraus, daß bei der Koordinatenverschiebung $x = \frac{\pi a}{2} - x'$ die eine Kurve in die andere übergeht.

II. Die Gleichung

$$y = a \cdot e^{\frac{x}{k}}, \quad \text{oder} \quad x = k \cdot \lg \frac{y}{a}$$

stellt eine Exponential- oder **logarithmische Kurve** dar; sie erfreut sich der Eigentümlichkeit, daß ihre Subtangente konstant ist (Fig. 60).

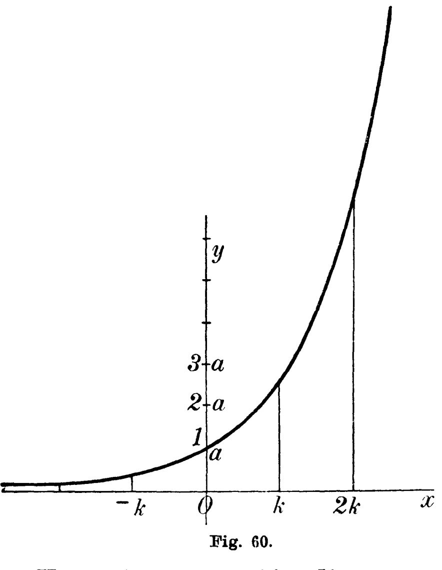
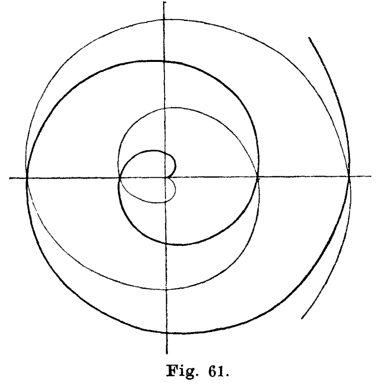


Fig. 60.

III. Die allereinfachste Gleichung zwischen den Polarkoordinaten ϱ, ω eines Punktes

$$\varrho = a\omega,$$

wo a eine Konstante ist, stellt eine


Fig. 61.

Kurve dar, die **Archimedische Spirale** (Fig. 61). Sie geht durch den Pol. Für $\omega = 2\pi$ haben wir $\varrho = 2\pi a = l$, und für $\omega = \frac{2\pi}{k}$ ist $\varrho = \frac{l}{k}$. Nehmen wir im Speziellen $k = 2^n$, so haben wir $\varrho = \frac{l}{2^n}$, und daraus ergibt sich eine einfache Art, beliebig viele Punkte der „ersten" Windung der Kurve zu zeichnen. In ähnlicher Weise lassen sich leicht Punkte der zweiten Windung zeichnen, der dritten, usf. Es ist wohl zu beachten, daß man, um die Kurve vollständig zu erhalten, für ω auch negative Werte zu nehmen hat; dadurch entsteht dann ein zweiter Zweig der Kurve, der symmetrisch zum ersten liegt in bezug auf die Polarachse, auf der sich auch beide Zweige schneiden.

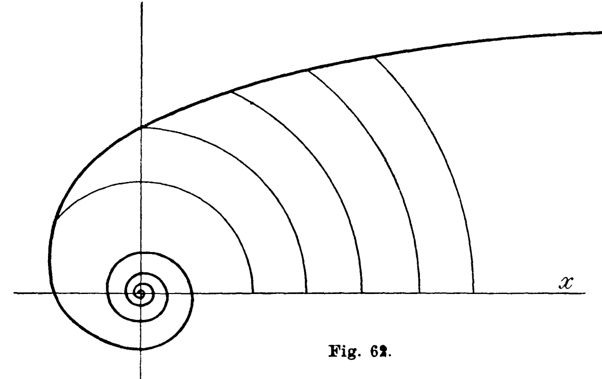


Fig. 62.

IV. Transformiert man die archimedische Spirale durch reziproke Radien, d. h. läßt man dem Punkte (ϱ, ω) den Punkt $\left(\varrho_1 = \frac{l^2}{\varrho},\ \omega_1 = \omega\right)$ entsprechen, so erhält man die

hyperbolische Spirale, deren Gleichung

$$\varrho_1 \cdot \omega_1 = \frac{l^2}{a}$$

lautet. Sie sagt aus, daß alle Kreisbogen um den Pol, von der Polarachse bis zur Kurve geordnet, gleich lang sind. S. Fig. 62, die auch die Gestalt der Kurve wiedergibt.

V. Gegeben ein Quadrat $ABCD$; um A beschreibe man mit AB als Radius einen Kreis (Fig. 63a) und lasse diesen Radius sich gleichförmig um A drehen, während die Gerade BC sich gleichförmig parallel zu sich selbst verschiebt; die Bewegungen seien derart geregelt, daß sie zugleich beginnen, und zugleich in die Lage AD ankommen. Der variable Schnittpunkt P dieser beiden Geraden beschreibt dann eine Kurve, die wegen ihrer Anwendbarkeit auf die Quadratur des Kreises und nach ihrem Erfinder die **Quadratrix des Dinostratus heißt.** Ist r die Seitenlänge des Quadrates, und sind AB und AD die Koordinatachsen, so läßt sich die Kurve darstellen durch

$$x = y \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2r} \cdot$$

Sie besteht außer aus einem parabelähnlichen Zweige noch aus unzählig vielen Zweigen rechts und links davon, die der Kotangenskurve ähnlich sind, wie es die Fig. 63b zeigt.

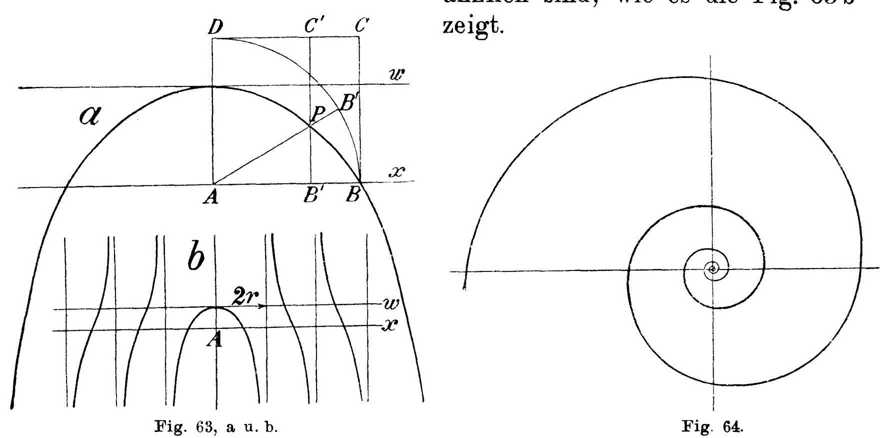


Fig. 63, a u. b.

Fig. 64.

VI. Ist c eine Strecke, μ eine Konstante, so stellt die Gleichung

$$\varrho = c e^{\mu \omega}$$

eine Kurve dar, die unendlich oft um den Pol läuft, ohne ihn zu erreichen. Es ist die **logarithmische Spirale** (Fig. 64), die sich einer großen Reihe merkwürdiger Eigenschaften erfreut, insbesondere bildet ihre Tangente mit dem Radiusvektor immer denselben Winkel.

VII. Denkt man sich um einen Kreis einen Faden geschlungen, und wickelt diesen ab, so beschreibt ein beliebiger Punkt des Fadens die sog. **Kreisevolvente** (Fig. 65). Man kann diese Kurve auch entstanden denken durch Rollen einer Geraden auf einem festen Kreise; dann sieht man leichter, daß sie auf dem Kreise eine Spitze haben muß und aus zwei symmetrischen Zügen besteht. Sie kann dargestellt werden durch

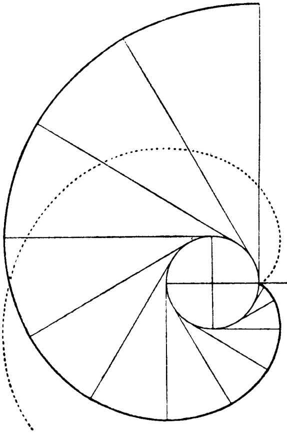


Fig. 65.

$$x = a \cdot \cos t + at \cdot \sin t,$$

$$y = a \cdot \sin t - at \cdot \cos t.$$

Vgl. auch Nr. 184 Schluß.

VIII. Rollt ein Kreis ohne zu gleiten auf einer festen Geraden, der Basis, so beschreibt ein Punkt seiner Ebene eine transzendente Kurve, die **Zykloide**, und zwar eine gemeine, verlängerte oder verkürzte, jenachdem der Punkt auf, außerhalb oder innerhalb der Peripherie liegt. (S. Fig. 66, wo O, P, Q die entsprechenden Lagen des Punktes sind.) Es sei C der Mittelpunkt des Kreises und etwa P der beschreibende Punkt in seiner tiefsten Lage als Anfangslage. Die Basis nehmen wir als x-Achse, das von P darauf gefällte Lot PO (das also durch P hindurchgeht), als y-Achse; r sei der Radius des Kreises, d der Abstand des Punktes P von C. Sind nun C', P', O' die entsprechenden Punkte in einer anderen

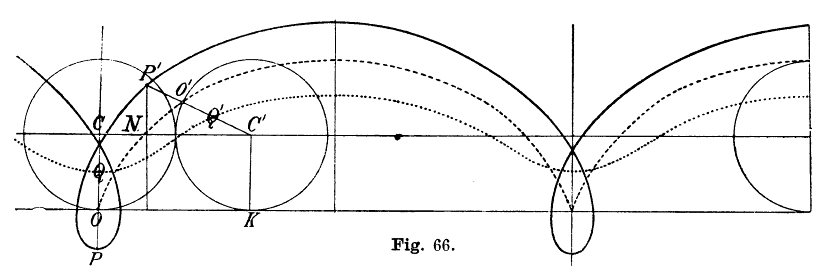


Fig. 66.

Lage und berührt der Kreis die Basis jetzt in K, so ist offenbar, wenn N der Fußpunkt des von P' auf $C'C$ gefällten Lotes ist,

$$\text{arc } O'K = \overline{OK}, \qquad x = OK - C'N, \qquad y = P'N + C'K.$$

Ist nun $\sphericalangle O'C'K = \varphi$, so ist offenbar

$$\text{arc } O'K = r\varphi,$$

und

$$P'N = d \cdot \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -d \cdot \cos\varphi, \quad C'N = d \cdot \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = d \cdot \sin\varphi,$$

und somit ist

$$x = r\varphi - d \cdot \sin\varphi, \qquad y = r - d \cdot \cos\varphi,$$

die parametrische Darstellung aller drei Zykloiden. Im Falle der gemeinen Zykloide, $d = r$, wird diese zu

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = r(1 - \cos\varphi).$$

Drehen wir die Achsen um einen Winkel λ und wählen den Anfangspunkt in geeigneter Weise, so können wir die Darstellung auch so schreiben:

$$x = d\sin\psi - \psi r\cos\lambda, \qquad y = d\cos\psi - \psi r\cdot\sin\lambda,$$

oder

$$x = d\sin\psi - p\cdot\psi, \qquad y = d\cos\psi - q\cdot\psi.$$

Dann ist $\sqrt{p^2+q^2} = r$, und die Zykloide verlängert, gemein oder verkürzt, jenachdem $\sqrt{p^2+q^2} \gtreqless d$. Die verlängerte Zykloide hat unzählige Kotenpunkte, die gemeine unzählige Spitzen, die verkürzte unzählige Wendepunkte.

IX. Ersetzt man in dem vorigen Falle die geradlinige Basis durch einen Kreis mit dem Radius R, so entsteht eine algebraische oder transzendente Kurve, jenachdem $\frac{R}{r}$ rational ist oder nicht; die entsprechende Kurve heißt **Epizykloide** oder **Hypozykloide**, jenachdem sich die beiden Kreise von außen oder von innen berühren, und verlängerte, gemeine, oder verkürzte, jenachdem der beschreibende Punkt außerhalb, auf oder innerhalb der Peripherie des rollenden Kreises liegt. (S. die Fig. 67, in der $\frac{R}{r} = \frac{3}{2}$, und die gemeine Epizykloide vollständig gezeichnet ist, die verlängerte nur zum Teil punktiert.) Wir behalten die vorigen Bezeichnungen bei, nehmen aber als Koordinatenanfang den Mittelpunkt O des festen Kreises, als x-Achse die Gerade, die durch den Berührungspunkt A der beiden Kreise geht, wenn diese sich in der Lage befinden, daß der Punkt P auf der Zentrale OC liegt. Wir betrachten nun den beweglichen Kreis in einer anderen Lage und es seien C', P', A' die neuen Lagen, während die Berührung jetzt in B stattfindet. Dann ist:

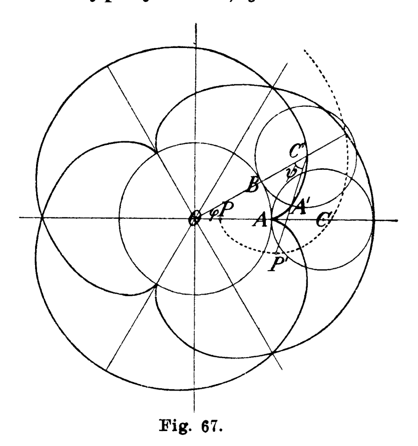


Fig. 67.

$$\text{arc}\, AB = \text{arc}\, A'B,$$

und wenn wir $\sphericalangle AOB = \varphi$, $\sphericalangle BC'A' = \psi$ setzen,

$$r\psi = R\varphi.$$

Nun ist die Projektion von OP' gleich der Projektion von OC' plus der Projektion von $C'P'$. Es bildet aber $C'P'$ mit Ox den Winkel

$\varphi \pm \psi - \pi$, und es ist $OC = R \pm r$, jenachdem wir es mit der Epizykloide oder Hypozykloide zu tun haben, und somit erhalten wir, wenn wir auf beide Achsen projizieren, für die Koordinaten von P', die Gleichungen:

$$x = (R \pm r) \cos \varphi \mp d \cos (\varphi \pm \psi),$$
$$y = (R \pm r) \mp h \sin (\varphi \pm \psi),$$

wo die unteren Vorzeichen sich auf die Hypozykloide beziehen. Man kann zweckmäßig einen der beiden Winkel, z. B. ψ eliminieren und erhält dann die Darstellung aller zykloidischen Kurven bei Variation der Größe d als:

$$x = (R \pm r) \cos \varphi \mp d \cdot \cos \left(\frac{R \pm r}{r} \varphi\right)$$
$$y = (R \pm r) \sin \varphi - d \cdot \sin \left(\frac{R \pm r}{r} \varphi\right) \cdot$$

X. Um zahllose andere transzendente Kurven zu erhalten, kann man sich der Varignonschen Transformation bedienen, die in folgendem besteht: Es seien $f(x, y) = 0$ die Gleichung einer Kurve Γ, und $OM = x$ und $MP = y$ die kartesischen Koordinaten eines beliebigen Punktes von Γ. Man beschreibe nun um O mit dem Radius a einen Kreis, der Ox in A schneidet, sowie einen zweiten mit OM. Alsdann lasse man dem Punkte P jenen Punkt P' des zweiten Kreises entsprechen, daß, wenn L der Endpunkt des Radius OP' ist, sich verhalte

$$\frac{2 a \pi}{\operatorname{arc} AL} = \frac{2 \pi h}{MP},$$

wo h eine gegebene Strecke sei. Durchläuft nun P die Kurve Γ, so beschreibt P' eine neue Kurve, die im allgemeinen transzendent ist, unter Umständen auch wieder algebraisch sein kann. Sind ϱ, ω die Polarkoordinaten von P', wenn O Pol und Ox Polarachse ist, so hat man offenbar

$$x = \varrho, \quad \text{und} \quad y = h \cdot \omega$$

als analytischen Ausdruck für diese Transformation, und es ist

$$f(\varrho, h\omega) = 0$$

die Polargleichung der neuen Kurve Γ'. So entsteht z. B. aus der Geraden $Ax + By + C = 0$ die Kurve $A\varrho + Bh\omega + C = 0$, welche eine archimedische Spirale ist (S. 84); aus der logarithmischen Kurve $y^h = e^x$ die log. Spirale $l\omega = e^{\frac{\varrho}{h}}$ (S. 85), usw.

§ 5. Graphische Kurven und Fehlerkurven.

190. Bei den Anwendungen, die die darstellende Geometrie in der Kunst und Technik erfährt, kommt es nicht selten vor, daß man mit einer Kurve zu operieren hat, deren analytische Darstellung un-

bekannt ist, oder nicht existiert; solche bezeichnet man mit dem Namen graphische Kurven. Für solche ist es unmöglich, mit mathematischer Genauigkeit die Tangente in einem Punkte zu konstruieren, oder wenn sie als Enveloppen von Geraden auftreten, den Berührungspunkt der Tangente, die Normale oder den Krümmungsradius usw. festzulegen. In Ermangelung exakter Methoden muß man daher hier zu gewissen Näherungsverfahren seine Zuflucht nehmen, die wenn wir die Nomenklatur von Hachette annehmen, mit dem gemeinsamen Namen Methode der Fehlerkurven bezeichnet werden. Bevor wir diese darlegen, sei bemerkt, daß das Folgende nicht der theoretischen darstellenden Geometrie angehört, und daher für denjenigen, den praktische Anwendungen nicht interessieren, übergangen werden könnte.

Aufgabe I. In einem bestimmten Punkte P einer graphischen Kurve die entsprechende Tangente zu konstruieren.

Auflösung: Man beschreibe um P mit beliebigem Radius einen Kreis K (Fig. 68) und betrachte in ihm die Radien $PB_1, PB_2, PB_3 \ldots$, die die Kurve Γ in $A_1, A_2, A_3 \ldots$ schneiden, und trage auf ihnen nach Größe und Richtung die Strecken ab $PC_1 = A_1B_1$, $PC_2 = A_2B_2 \ldots$ Der Ort Δ der Punkte C_1, C_2, $C_3 \ldots$, der die Fehlerkurve heißt, schneidet K in einem Punkte, den wir B nennen, insofern er auf K liegt, und C insofern er auf Δ liegt. Diesen Punkt verbinden wir mit P, und die Verbindungsgerade g treffe Γ in einem Punkte, den wir A nennen wollen. Wegen der Definition von Δ haben wir auch dem Sinne nach, $\overline{PC} = \overline{AB}$; nun fällt B mit C zusammen, folglich auch A mit P, d. h. g ist Tangente in P an Γ. — Sollte P ein mehrfacher Punkt sein, so führe man die Konstruktion für alle durch P gehenden Kurvenzweige aus. Aus der obigen Konstruktion ergibt sich auch sogleich die Normale an eine graphische Kurve.

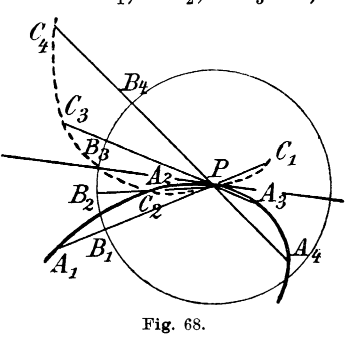


Fig. 68.

Aufgabe II. Von einem Punkte P der Ebene an eine graphische Kurve die Tangente zu ziehen.

Auflösung: In den meisten Fällen läßt die bloße Betrachtung der Figur einen endlichen Bogen der Kurve erkennen, innerhalb dessen der Berührungspunkt der gesuchten Tangente fallen muß.

I. Man ziehe durch den Punkt P eine beliebige Sekante t, die den endlichen Bogen der Kurve in A und B schneidet (s. Fig. 69) und bestimme den Mittelpunkt M dieser Strecke. Bei Variation von t variiert auch M und beschreibt einen Kurvenbogen, der den der graphischen

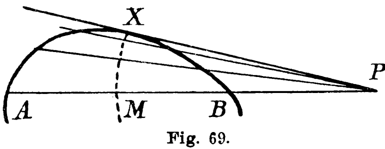


Fig. 69.

Kurve in dem gesuchten Berührungspunkte X trifft. — Dies Verfahren hat den Übelstand, daß der Bogen der Hilfskurve ganz auf der einen Seite der gegebenen Kurve liegt, weshalb der Treffpunkt nicht leicht und sicher zu finden ist. Diesen Übelstand beseitigt die folgende Methode.

II. Man ziehe durch P wie vorhin eine Transversale t, die die graphische Kurve in A und B schneidet, und konstruiert nun über AB die gleichseitigen Dreiecke ABM und ABN. Dreht man nun t um P, so beschreiben die Punkte M und N eine „Fehlerkurve" (s. Fig. 70), die den betreffenden Kurvenbogen in dem gesuchten Berührungspunkte X der Tangente schneidet.

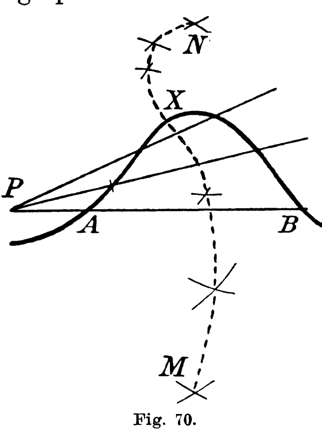


Fig. 70.

III. Man zieht durch P eine beliebige Transversale t, die den Bogen der graphischen Kurve in A und B trifft, dann trägt man nach entgegengesetzten Seiten parallel zu einer festen Richtung d die Strecken AC und BD ab gleich (oder auch proportional) mit der Sehne AB. Dreht sich nun t um P (s. Fig. 71), so beschreiben die Punkte C und D eine Linie, die Fehlerkurve, die offenbar die Kurve in dem gesuchten Berührungspunkte X schneidet.

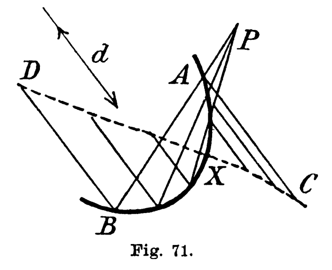
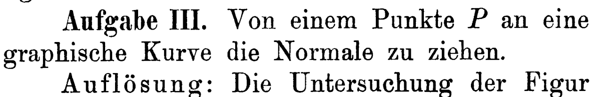


Fig. 71.

Anmerkung: Diese Konstruktionen erfordern keine besonderen Modifikationen, wenn der Punkt P im Unendlichen liegt, also kann man auch die zu einer bestimmten Richtung parallele Tangente an eine graphische Kurve ziehen. Die letzte Methode ermöglicht auch den Berührungspunkt aufzufinden, wenn die Tangente der graphischen Kurve gegeben ist.



Aufgabe III. Von einem Punkte P an eine graphische Kurve die Normale zu ziehen.

Auflösung: Die Untersuchung der Figur läßt unschwer den oder die Bogen erkennen, innerhalb deren der Fußpunkt der Normalen zu suchen ist.

Fig. 72.

I. Methode. Man beschreibe um P als Zentrum mit einem hinlänglich großen Radius einen Kreis, der die Kurve in A und B schneidet (s. Fig. 72). Man bestimme die Mitte M des Bogens AB. Variiert man nun jenen Radius, so beschreibt M eine Kurve, die die gegebene in dem gesuchten Fußpunkte X der Normalen trifft. Dies

Verfahren hat denselben Übelstand, wie das unter I bei der vorigen Aufgabe angegebene.

II. Methode. Man beginne wie vorhin, trage aber dann (s. Fig. 73) auf PA und PB von A und B aus in entgegengesetzten Richtungen die Strecken AA_1 und BB_1 gleich (oder auch proportional) AB ab. Variiert man jetzt den Radius des Kreises um P, so variieren auch A_1 und B_1, indem sie eine Fehlerkurve beschreiben, die die gegebene in dem gesuchten Punkte X trifft.

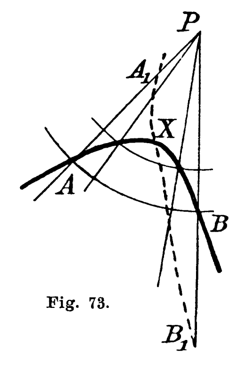


Fig. 73.

III. Methode. Kennt man eine Konstruktion der Normale für jeden beliebigen Punkt der Kurve Γ und will die Normale von einem gegebenen Punkte P der Ebene haben, so kann man eine andere Fehlerkurve Δ brauchen. Man nehme nämlich einen beliebigen Punkt O in der Ebene von Γ, verbinde ihn mit einem beliebigen Kurvenpunkte M und bestimme den Punkt N, in dem die Gerade OM durch die Parallele geschnitten wird, die durch P zu der Normale in M gezogen ist. Bewegt man M auf Γ, so beschreibt N die Kurve Δ, deren Schnitt mit Γ den Fußpunkt der von P gezogenen Normalen liefert.

Anmerkung: Falls der Punkt P im Unendlichen liegt, läßt sich die Aufgabe sofort zurückführen auf die, die Tangente in einer bestimmten Richtung zu finden.

Aufgabe IV. Für eine graphische Kurve Γ den Krümmungskreis in einem gegebenen Punkte P zu konstruieren.

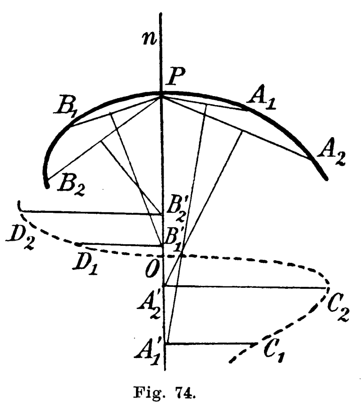


Fig. 74.

Auflösung: Man beginne zunächst mit der Konstruktion der Normalen n im Punkte P (vgl. Schluß der Aufg. I) und betrachte dann die Kurvenpunkte $A_1, A_2 \ldots$ auf der einen Seite von P und $B_1, B_2 \ldots$ auf der anderen Seite (Fig. 74). Die Mittelsenkrechte auf PA_1 schneidet n in einem Punkte A'_1, der Mittelpunkt eines Kreises ist, der Γ in P berührt und sie in A_1 schneidet; in gleicher Weise entsprechen den Punkten $A_2, \ldots, B_1, B_2 \ldots$ die Punkte $A'_2, \ldots B'_1, B'_2, \ldots$. Man errichte nun in diesen Punkten auf der einen Seite von n die Senkrechten $\overline{A'_1C_1} = \overline{PA_1}$, $\overline{A'_2D_2} = \overline{PA_2} \ldots$ und nach der anderen Seite $\overline{B'_1D'_1} = \overline{PB_1}$, $\overline{C'_1D_1} = \overline{PB_2} \ldots$. Der geometrische Ort der Punkte $C_1, C_2 \ldots D_1, D_2 \ldots$ ist eine Linie (Fehlerkurve), die n im Punkte O schneiden möge. Der um O mit OP beschriebene Kreis berührt nicht nur Γ in P, sondern schneidet auch von ihr ein Stück

ab von der Länge Null. Folglich ist O der Krümmungsmittelpunkt für P.

Zur Übung: Man konstruiere die gemeinsamen Tangenten zweier graphischen Kurven.

§ 6. Graphische Darstellung der ebenen Kurven, nach den Methoden der darstellenden Geometrie.

191. I. Nach der Mongeschen Methode. Um eine ebene Kurve Γ zu individualisieren, kann man ihre Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$ angeben und eine Projektion, etwa Γ', die dann entweder vollständig im Grundriß gezeichnet ist oder geometrisch definiert. Zu jedem Punkte P' im Grundriß kann man dann nach Nr. 16 den Aufriß P'' bestimmen; der Ort der Punkte P'' ist dann die zweite Projektion von Γ. In derselben Weise kann man auch, wenn Γ'' gegeben ist und τ, zu Γ' gelangen. — Zur Bestimmung von Γ kann auch eine Projektion (etwa Γ') gegeben sein, und drei Punkte von der anderen Projektion; weitere Punkte lassen sich dann nach dem in Nr. 26 angegebenen Verfahren auffinden.

Die Tangente an die Kurve im Punkte P hat natürlich zu Projektionen die Tangente von Γ' in P', bzw. von Γ'' in P''.

Eine beliebige Ebene $\sigma \equiv [s_1, s_2]$ schneidet die Kurve in einer Gruppe von Punkten; um diese zu finden konstruiere man die Gerade $r \equiv \sigma\tau$. r' schneidet Γ' in den Horizontalprojektionen jener Punkte, aus denen sich die Vertikalprojektionen ergeben.

In ähnlicher Weise wird eine Gerade $l \equiv (l', l'')$ von einer gewissen Gruppe von Tangenten getroffen. Um diese zu finden, braucht man nur den Punkt $L \equiv l\tau$ zu konstruieren; die von L' an Γ' gezogenen Tangenten sind die ersten Projektionen der gesuchten Linien, die zweiten ergeben sich leicht.

II. Nach der Methode der Zentralprojektion. In diesem Falle ist die bequemste Art die Kurve festzulegen, die, daß man ihre Projektion Γ' und ihre Ebene $\tau \equiv [ti']$ angibt, dadurch ist, wie sich aus Nr. 56 ergibt, jeder Punkt P von Γ völlig bestimmt, ebenso die zugehörige Tangente, indem sie in τ liegen und die Tangente von Γ' in P' zur Projektion haben muß. Die Schnittpunkte der Kurve mit einer anderen beliebigen Ebene, sowie die von der Kurve an eine gegebene Gerade gehenden Tangenten, ergeben sich in ähnlicher Weise wie vorhin.

III. Nach der Methode der kotierten Ebenen. Um eine Kurve nach dieser Methode festzulegen, kann man ihre Projektion angeben, sowie die Ebene der Kurve durch ihre Neigungsskala bestimmen. Statt der letzteren kann man auch drei Punkte der Kurve durch ihre Koten angeben, wodurch ebenfalls ihre Ebene bestimmt ist (vgl. Nr. 99 u. 97).

Welches nun auch die Darstellungsmethode sei, in allen Fällen wird man die wahre Gestalt und Größe der Kurve erhalten, wenn man ihre Ebene in die Projektionsebene umlegt.

Zur Übung: I. Ein Kreis mit dem Radius r berührt alle drei Ebenen eines Mongeschen Systems in Punkten, die gleichweit von den Achsen entfernt sind. Welches sind seine Projektionen? — **II.** Welches ist die Zentralprojektion einer Kissoide, deren Spitze im Projektionszentrum, deren Wendeasymptote in der Verschwindungsebene liegt? — **III.** Projiziere eine Sinuslinie auf eine zu ihrer Ebene senkrechte Ebene, die durch die x-Achse geht, wenn das Zentrum in einer dazu senkrechten durch die y-Achse gehenden Ebene liegt. — **IV.** Die Projektion einer Kurve sei eine Archimedische Spirale $\varrho = a\omega$; der Anfang habe die Kote 0, der Schnitt der Polarachse mit der ersten Windung die Kote a, der dazu senkrechte Vektor schneide die erste Windung in einem Punkte mit der Kote $2a$. Wie sieht die ursprüngliche Kurve aus?

Zweites Kapitel.

Raumkurven im allgemeinen.

§ 1. Kurven als geometrische Örter von Punkten.

192. Bewegt sich ein Punkt im Raume nach einem bestimmten Gesetze, indem er dabei ∞^1 verschiedene Lagen einnimmt, so ist der Ort der von ihm eingenommenen Lagen im allgemeinen eine krumme, und nicht ganz einer Ebene angehörende Linie, man nennt sie eine Raumkurve oder Kurve doppelter Krümmung.

Wir wollen eine derartige Kurve mit Γ bezeichnen und ein beliebiges kartesisches rechtwinkliges Koordinatensystem nehmen; sind dann x, y, z die Koordinaten eines beliebigen Punktes von Γ, so sind x, y, z nicht konstante, sondern etwa mit der Zeit t variable Größen, also Funktionen von t, was wir in der Symbolik der Analysis dadurch ausdrücken, daß wir schreiben

$$x = \xi(t), \quad y = \eta(t), \quad z = \zeta(t). \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

In diese Gleichungen können wir statt t auch eine andere unabhängige Variable τ einführen, die mit t durch eine Beziehung wie

$$t = \varphi(\tau)$$

verknüpft ist. Dann werden die Gl. (1) zu

$$x = \xi(\varphi(\tau)), \quad y = \eta(\varphi(\tau)), \quad z = \zeta(\varphi(\tau)),$$

oder kürzer:

$$x = \bar{\xi}(\tau), \qquad y = \bar{\eta}(\tau), \qquad z = \bar{\zeta}(\tau),$$

wo die $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ Symbole von drei neuen Funktionen sind. Da diese Gleichungen von derselben Form sind wie (1), so folgt daraus, daß 1. es nicht nötig ist, daß in Gl. (1) die Zeit die unabhängige Variable sei, 2. aus einer analytischen Darstellung vom Typus (1) sich unzählige andere ergeben, indem man irgend eine Vertauschung der unabhängigen



Variablen vornimmt. Diese Variable, durch deren Funktion die Koordinaten der Kurvenpunkte ausgedrückt werden, hat auch im Raume den Namen Parameter erhalten, und die analytische Darstellung vom Typus (1) heißt parametrische Darstellung. Umgekehrt: nimmt man beliebig drei Gleichungen vom Typus (1), so wird dadurch eine Kurve im Raume bestimmt. Je zwei der Gleichungen (1) zusammengenommen stellen dann nach Nr. 177 die Projektionen der Raumkurve auf die Koordinatebenen dar.

Die Allgemeinheit der Funktionen ξ, η, ζ wollen wir dahin beschränken, daß ihre Koeffizienten reelle Zahlen seien, und daß sie im allgemeinen stetig seien, und Ableitungen der betrachteten Ordnungen für alle Werte der Variablen, die in die Rechnung eintreten, haben.

Wir betrachten zugleich mit Γ eine Ebene π, deren Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

sein möge, und wollen untersuchen, ob es Punkte gibt, die Γ mit dieser gemeinsam hat. Solche entsprechen offenbar jenen Werten des Parameters t, für die

$$A \cdot \xi(t) + B \cdot \eta(t) + C \cdot \zeta(t) + D = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Da diese Gleichung im allgemeinen eine bestimmte Gruppe von Wurzeln hat, so sieht man, daß es auch im allgemeinen eine bestimmte diskrete Gruppe[1]) von Schnittpunkten der Γ mit π gibt. Es kann allerdings auch eintreten, daß (2) identisch befriedigt wird; alsdann liegt die Kurve Γ in der Ebene π. **Folglich ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Kurve (1) eben sei, die, daß es vier Konstanten A, B, C, D gibt, von der Beschaffenheit, daß (2) identisch** (in bezug auf t) **befriedigt wird.**

Zum Beispiel: Man zeige, daß die Kurve

$$x = \frac{a_0 t^2 + a_1 t + a_2}{d_0 t^2 + d_1 t + d_2}, \quad y = \frac{b_0 t^2 + b_1 t + b_2}{d_0 t^2 + d_1 t + d_2}, \quad z = \frac{c_0 t^2 + c_1 t + c_2}{d_0 t^2 + d_1 t + d_2}$$

eben ist, gleichgültig welche Werte auch die $a_0, \ldots d_2$ haben, und bestimme ihre Ebene.

Bezeichnen wir mit ds den unendlich kleinen Bogen zwischen den Punkten mit den Parametern t und $t + dt$, so haben wir nach bekannten Formeln aus der analytischen Geometrie

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = [\overline{\xi'(t)}^2 + \overline{\eta'(t)}^2 + \overline{\zeta'(t)}^2]\, dt^2,$$

oder

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\overline{\xi'(t)}^2 + \overline{\eta'(t)}^2 + \overline{\zeta'(t)}^2}.$$

Wenn wir daher als Parameter t die Bogenlänge s selber nehmen, so

---

1) Die Elemente einer diskreten Gruppe entprechen den Wurzeln einer algebraischen oder transzendenten bestimmten Gleichung.

wird $\frac{ds}{dt} = 1$, und alsdann identisch in bezug auf t

$$\overline{\xi'(t)}^2 + \overline{\eta'(t)}^2 + \overline{\zeta'(t)}^2 = 1;$$

im vorliegenden Falle genügen außer dieser Identität die Funktionen ξ, η, ζ auch allen denjenigen, die sich hieraus durch Differentiation nach $t \equiv s$ ergeben, z. B. $\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = 0$, usw.

193. Wir betrachten jetzt auf Γ die beiden Punkte P und Q mit den Parametern t_0 und t_1. Die sie verbindende Gerade heißt eine Sehne der Raumkurve, und sie hat, wenn x, y, z die laufenden Koordinaten sind, die Gleichungen

$$\frac{x - \xi(t_0)}{\xi(t_1) - \xi(t_0)} = \frac{y - \eta(t_0)}{\eta(t_1) - \eta(t_0)} = \frac{z - \zeta(t_0)}{\zeta(t_1) - \zeta(t_0)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Setzen wir voraus, daß in ihr x, y, z gegeben seien, so lassen sich aus ihr t_0 und t_1 bestimmen, und das zeigt uns, daß im allgemeinen **durch jeden Punkt des Raumes eine diskrete Gruppe von Sehnen der Raumkurve hindurchgehen.** Infolge der Annahme über die Funktionen ξ, η, ζ werden die Lösungen der Gl. (3) reell oder paarweise konjugiert imaginär sein; den ersteren entsprechen reelle Sehnen von Γ, den letzteren ideelle Sehnen, d. h. Sehnen die nicht in reellen Punkten die Γ treffen. Ausnahmsweise kann es auch vorkommen, daß zwei verschiedene Werte von t_0 und t_1 des Parameters t zu demselben Kurvenpunkte führen; dann wird sein

$$\xi(t_1) = \xi(t_0), \quad \eta(t_1) = \eta(t_0), \quad \zeta(t_1) = \zeta(t_0),$$

während $t_1 \neq t_0$; in diesem Falle werden die Gleichungen (3) identisch befriedigt, und jener Punkt heißt ein Doppelpunkt der Raumkurve. Allgemeiner: wenn r Werte des Parameters, den Funktionen ξ, η, ζ denselben Wert geben, so haben wir es mit einem vielfachen (r-fachen) Punkte zu tun.

Verfahren wir ähnlich, wie wir es (Nr. 180) in der Ebene getan haben, halten den Punkt P fest und lassen den Punkt Q sich ihm unendlich nähern und sehen zu, ob dann die Gerade PQ einer bestimmten Lage zustrebt. Wir setzen zu diesem Zwecke $t_1 = t_0 + h$, wo h eine Größe ist, die wir nach Null hin konvergieren lassen. Da nun

$$\xi(t_0 + h) - \xi(t_0) = h\xi'(t_0 + \theta_1 h), \quad \eta(t_0 + h) - \eta(t_0) = h\eta'(t_0 + \theta_2 h),$$
$$\zeta(t_0 + h) - \zeta(t_0) = h\zeta'(t_0 + \theta_3 h), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wo die θ Zahlen zwischen 0 und 1 sind, so kann man die Gl. (3) auch schreiben als

$$\frac{x - \xi(t_0)}{\xi'(t_0 + \theta_1 h)} = \frac{y - \eta(t_0)}{\eta'(t_0 + \theta_2 h)} = \frac{z - \zeta(t_0)}{\zeta'(t_0 + \theta_3 h)},$$

und folglich wird für den Grenzwert $h = 0$

$$\frac{x-\xi(t_0)}{\xi'(t_0)}=\frac{y-\eta(t_0)}{\eta'(t_0)}=\frac{z-\zeta(t_0)}{\zeta'(t_0)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

oder auch
$$\left\| \begin{matrix} x-\xi(t_0) & y-\eta(t_0) & z-\zeta(t_0) \\ \xi'(t_0) & \eta'(t_0) & \zeta'(t_0) \end{matrix} \right\| = 0.$$

Da nun die Existenz der Ableitungen von ξ, η, ζ vorausgesetzt ist, so strebt die Gerade PQ im allgemeinen einer bestimmten Lage zu und heißt dann die Tangente in dem betreffenden Kurvenpunkte. Dieser Schluß scheint hinfällig zu werden, wenn für $t = t_0$ zu gleicher Zeit die drei Ableitungen von ξ, η, ζ verschwinden. Um zu sehen, was dann eintritt, wollen wir, ganz allgemein vorgehend, annehmen, daß für $t = t_0$ alle Ableitungen der Funktionen ξ, η, ζ bis zur $(r-1)^{\text{ten}}$ zu Null werden, jedoch nicht alle r^{ten} Ableitungen.[1]) Alsdann bestehen an Stelle von (4) die Gleichungen

$$\xi(t_0+h)-\xi(t_0)=\frac{h^r}{r!}\xi^{(r)}(t_0+\theta_1 h), \quad \eta(t_0+h)-\eta(t_0)=\frac{h^r}{r!}\eta^{(r)}(t_0+\theta_2 h)$$
$$\zeta(t_0+h)-\zeta(t_0)=\frac{h^r}{r!}\zeta^{(r)}(t_0+\theta_3 h),$$

woraus sich beim Übergang zur Grenze ergibt, daß auch in diesem Falle die Tangente existiert, aber die Gleichungen hat

$$\frac{x-\xi(t_0)}{\xi^{(r)}(t_0)}=\frac{y-\eta(t_0)}{\eta^{(r)}(t_0)}=\frac{z-\zeta(t_0)}{\zeta^{(r)}(t_0)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

oder
$$\left\| \begin{matrix} x-\xi(t_0), & y-\eta(t_0), & z-\zeta(t_0) \\ \xi^{(r)}(t_0) & \eta^{(r)}(t_0) & \zeta^{(r)}(t_0) \end{matrix} \right\| = 0.$$

Die Gleichungen (5) oder (5′) können auch dazu dienen, die Tangenten an die verschiedenen Kurvenzweige, die durch einen vielfachen Punkt der Kurve gehen, zu bestimmen.

Ist t_0 der Parameter desjenigen Kurvenpunktes, dessen zugehörige Tangente die Gerade mit den Koordinaten $p_{12} \ldots p_{34}$[2]) trifft, so besteht die Gleichung

$$\left| \begin{matrix} p_{14} & p_{24} & p_{34} \\ \xi(t_0) & \eta(t_0) & \zeta(t_0) \\ \xi'(t_0) & \eta'(t_0) & \zeta'(t_0) \end{matrix} \right| = p_{23}\xi'(t_0)+p_{31}\eta'(t_0)+p_{12}\zeta'(t_0) \ldots \quad (6)$$

Da dieses eine bestimmte Gleichung für t_0 ist, so folgt daraus, **daß**

---

1) Es ist leicht zu sehen, daß r eine endliche Zahl ist, wenn ξ, η, ζ keine Konstanten sind.

2) Wie bekannt, sind diese Größen den Determinanten proportional, die aus folgender Matrix entstehen

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

wo (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) zwei Punkte der Geraden sind.

die Tangenten einer Raumkurve, welche eine gegebene Gerade des Raumes treffen, eine diskrete Gruppe bilden.

194. Die im Vorigen angestellten Betrachtungen sind augenscheinlich eine Erweiterung der früher über die ebenen Kurven und ihre Tangenten gemachten Bemerkungen. Die folgenden Betrachtungen aber, die auf der Räumlichkeit der Kurven, darauf daß sie nicht eben sind, beruhen, haben keine Analogien mit dem Früheren.

Wir betrachten das Ebenenbüschel, das die Tangente p im Punkte P mit dem Parameter t_0 als Achse hat. Jede seiner Ebenen nennt man eine Berührungsebene der Kurve, und diese kann als durch die Gerade p und einen beliebigen Kurvenpunkt Q bestimmt angesehen werden. Stellen wir uns vor, daß auch Q auf der Kurve liege und sich auf dieser bewegend dem Punkte P unendlich nähere: wird alsdann die Ebene pQ einer bestimmten Grenzlage zustreben? Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir die Gl. (5) der Tangente in dem Punkte P der betrachteten Kurve. Die Koordinaten eines beliebigen von P verschiedenen Punktes R dieser Tangente haben einen Ausdruck von folgender Form

$$x = \xi(t_0) + \varrho \cdot \xi'(t_0), \quad y = \eta(t_0) + \varrho \cdot \eta'(t_0), \quad z = \zeta(t_0) + \varrho \cdot \zeta'(t_0),$$

wo $\varrho \neq 0$ ist.

Die durch P, R und den Kurvenpunkt Q mit dem Parameter $t_0 + h$ gehende Berührungsebene hat die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ \xi(t_0) & \eta(t_0) & \zeta(t_0) & 1 \\ \xi(t_0) + \varrho \cdot \xi'(t_0) & \eta(t_0) + \varrho \cdot \eta'(t_0) & \zeta(t_0) + \varrho \cdot \zeta'(t_0) & 1 \\ \xi(t_0 + h) & \eta(t_0 + h) & \zeta(t_0 + h) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder, nachdem wir den Faktor $\varrho \neq 0$ beseitigt haben

$$\begin{vmatrix} x - \xi(t_0) & y - \eta(t_0) & z - \zeta(t_0) \\ \xi'(t_0) & \eta'(t_0) & \zeta'(t_0) \\ \xi(t_0+h) - \xi(t_0) - h\xi'(t)_0 & \eta(t_0+h) - \eta(t_0) - h\eta'(t)_0 & \zeta(t_0+h)\zeta(t_0) - h\zeta'(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Nun ist

$$\xi(t_0 + h) = \xi(t_0) + h\xi'(t_0) + \frac{h^2}{2!}\,\xi''(t_0 + \theta_1 h),$$

wo $0 < \theta_1 < 1$, daher

$$\xi(t_0 + h) - \xi(t_0) - h\xi'(t_0) = \frac{h^2}{2!}\,\xi''(t_0 + \theta_1 h);$$

für η und ζ bestehen ebensolche Beziehungen. Daher kann die vorige Gleichung nach Tilgung des Faktors $\frac{h^2}{2!}$ auch geschrieben werden als

$$\begin{vmatrix} x - \xi(t_0) & y - \eta(t_0) & z - \zeta(t_0) \\ \xi'(t_0) & \eta'(t_0) & \zeta'(t_0) \\ \xi''(t_0 + \theta_1 h) & \eta''(t_0 + \theta_2 h) & \zeta''(t_0 + \theta_3 h) \end{vmatrix} = 0.$$

Lassen wir nun h auf 0 zustreben, also den Punkt Q auf den Punkt P, so geht diese Gleichung über in

$$\begin{vmatrix} x - \xi(t_0) & y - \eta(t_0) & z - \zeta(t_0) \\ \xi'(t_0) & \eta'(t_0) & \zeta'(t_0) \\ \xi''(t_0) & \eta''(t_0) & \zeta''(t_0) \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Da nun dieses eine im allgemeinen bestimmte Gleichung ist, so stellt sie eine vollständig bestimmte Ebene dar; die fragliche Grenzlage existiert daher tatsächlich, und die durch (7) dargestellte Ebene heißt die Schmiegungs- (oder Oskulations-)Ebene der Kurve im Punkte mit dem Parameter t_0.

Wenn man in Gl. (7) x, y, z als bekannt ansieht und t_0 als gesucht, so kann sie dazu dienen, diejenigen Schmiegungsebenen der Kurve zu bestimmen, die durch den Punkt mit den Koordinaten x, y, z gehen; es folgt hieraus, daß **durch jeden Punkt des Raumes im allgemeinen eine diskrete Gruppe von Schmiegungsebenen an eine beliebige Raumkurve gehen.**

Anmerkung I. Der Abstand δ des Punktes M mit den Koordinaten x, y, z von der Ebene (6) wird bekanntlich gegeben durch

$$\delta = \begin{vmatrix} x - \xi(t_0) & y - \eta(t_0) & z - \zeta(t_0) \\ \xi'(t_0) & \eta'(t_0) & \zeta'(t_0) \\ \xi''(t_0) & \eta''(t_0) & \zeta''(t_0) \end{vmatrix} : D$$

wo der Kürze wegen

$$D = \sqrt{\left\| \begin{matrix} \xi'(t_0) & \eta'(t_0) & \zeta'(t_0) \\ \xi''(t_0) & \eta''(t_0) & \zeta''(t_0) \end{matrix} \right\|^2}$$

gesetzt wurde.

Nehmen wir insbesondere an, daß M ein dem Kurvenpunkte P benachbarter Punkt sei, etwa der dem Parameterwerte $t_0 + h$ entsprechende, so erhalten wir seinen Abstand von der Ebene, wenn wir in den obigen Ausdrücken statt x, y, z setzen $\xi(t_0 + h)$, $\eta(t_0 + h)$, $\zeta(t_0 + h)$. Setzen wir nun an Stelle dieser Ausdrücke ihre Entwicklungen nach steigenden Potenzen von h und machen in den Resultaten einige leichtere Reduktionen, so erhalten wir

$$D \cdot \delta = \frac{h^3}{3!} \begin{vmatrix} \xi'(t_0) & \eta'(t_0) & \zeta'(t_0) \\ \xi''(t_0) & \eta''(t_0) & \zeta''(t_0) \\ \xi'''(t_0) & \eta'''(t_0) & \zeta'''(t_0) \end{vmatrix} + \cdots\cdots,$$

wobei die nicht ausgeführten Glieder als Faktoren höhere als die dritte Potenz von h enthalten. Ist nun h sehr klein, so ist das Vorzeichen

von δ dasselbe wie von h^3, also auch wie von h; wenn demnach h sein Vorzeichen wechselt, so tut es auch δ. Hieraus folgt, daß die Punkte der Kurve, die sich in der Umgebung von P befinden, teils auf der einen, teils auf der anderen Seite der Schmiegungsebene befinden; mit anderen Worten: **Die Schmiegungsebene überschneidet die Kurve** (im Gegensatz zur Tangente einer ebenen Kurve, bei der im allgemeinen alle Punkte in der Nähe des Berührungspunktes auf derselben Seite der Tangente liegen; vgl. Nr. 179).

Anmerkung II. Identisch wird die Gl. (7) für solche (exzeptionelle) Punkte, für welche

$$\left\| \begin{matrix} \xi'(t_0) & \eta'(t_0) & \zeta'(t_0) \\ \xi''(t_0) & \eta''(t_0) & \zeta''(t_0) \end{matrix} \right\| = 0.$$

Eine Linie, bei welcher in jedem Punkte die Schmiegungsebene unbestimmt ist, muß eine Gerade sein; in der Tat, wenn für alle Werte von t

$$\frac{\xi''}{\xi'} = \frac{\eta''}{\eta'} = \frac{\zeta''}{\zeta'}$$

ist, und man bezeichnet den gemeinsamen Wert dieser Verhältnisse mit $\frac{\varrho''}{\varrho'}$, wo ϱ eine Funktion von t ist, so hat man

$$\xi''\varrho' - \xi'\varrho'' = 0, \quad \eta''\varrho' - \eta'\varrho'' = 0, \quad \zeta''\varrho' - \zeta'\varrho'' = 0,$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi'}{\varrho'}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\eta'}{\varrho'}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta'}{\varrho'}\right) = 0;$$

folglich

$$\xi' = a\varrho', \quad \eta' = b\varrho', \quad \zeta' = c\varrho',$$

wo a, b, c drei Konstanten sind. Integriert man von neuem, so bekommt man

$$\xi = a\varrho + a_0, \quad \eta = b\varrho + b_0, \quad \zeta = c\varrho + c_0,$$

wo a_0, b_0, c_0 neue Konstanten sind. Die fragliche Linie hat also folgende parametrische Darstellung

$$x = a\varrho + a_0, \quad y = b\varrho + b_0, \quad z = c\varrho + c_0$$

ist also eine Gerade, wie behauptet war.

Anmerkung III. Es kann der Fall eintreten, daß für einen Punkt P alle Ableitungen der Funktionen ξ, η, ζ bis zur r^{ten} verschwinden, also die $1^{\text{te}}, 2^{\text{te}}, 3^{\text{te}} \ldots (r-1)^{\text{te}}$, nicht aber alle die r^{ten}, ferner wohl alle die $(r+1)^{\text{ten}}, (r+2)^{\text{ten}} \ldots (r+s-1)^{\text{ten}}$, nicht aber alle $(r+s)^{\text{ten}}$; dann ergibt sich, durch eine den früheren ähnliche Überlegung, daß nun die Schmiegungsebene dargestellt wird durch

$$\begin{vmatrix} x - \xi(t_0) & y - \eta(t_0) & z - \zeta(t_0) \\ \xi^{(r)}(t_0) & \eta^{(r)}(t_0) & \zeta^{(r)}(t_0) \\ \xi^{(r+s)}(t_0) & \eta^{(r+s)}(t_0) & \zeta^{(r+s)}(t_0) \end{vmatrix} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

Anmerkung IV. Ein unendlich ferner Punkt einer Raumkurve wird im allgemeinen eine bestimmte Tangente und eine bestimmte Schmiegungsebene haben; nun können drei Fälle eintreten: 1. Sowohl diese Gerade als auch jene Ebene liegen im Endlichen. 2. Die Tangente liegt im Unendlichen, nicht aber die Schmiegungsebene. 3. Beide Elemente liegen im Unendlichen. Somit erhalten wir drei Arten unendlicher Zweige der Raumkurven, die wir bzw. bezeichnen als hyperbolische, parabolisch-hyperbolische, und als parabolische Zweige.

195. Die Schmiegungsebene in einem Punkte (t_0) an eine Kurve Γ kann auch definiert werden als eine solche Ebene, die Γ in drei, in jenen Punkt zusammenfallenden Punkten schneidet. Nämlich, ist

$$A[x-\xi(t_0)]+B[y-\eta(t_0)]+C[z-\zeta(t_0)]=0$$

die Gleichung einer durch jenen Punkt gehenden Ebene, so muß wegen der genannten Bedingung sein

$$A\xi'(t_0)+B\eta'(t_0)+C\zeta'(t_0)=0, \text{ und } A\xi''(t_0)+B\eta''(t_0)+C\zeta''(t_0)=0.$$

Eliminieren wir hieraus $A, B, C,$ so gelangen wir wieder auf Gl. (7), womit die Behauptung bewiesen ist. — Man kann aber auch fragen, ob es Ebenen gibt, die in einem Punkte $t=t_0$ vier zusammenfallende Schnitte mit Γ haben; in diesem Falle muß noch sein

$$A\xi'''(t_0)+B\eta'''(t_0)+C\zeta'''(t_0)=0.$$

Damit nun die drei Gleichungen zugleich bestehen können, muß sein

$$\begin{vmatrix} \xi'(t_0) & \eta'(t_0) & \zeta'(t_0) \\ \xi''(t_0) & \eta''(t_0) & \zeta''(t_0) \\ \xi'''(t_0) & \eta'''(t_0) & \zeta'''(t_0) \end{vmatrix} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Aus dieser Gleichung für t_0 lassen sich die Parameter zur Bestimmung derjenigen Punkte finden, für die jene Bedingung zutrifft. Diese heißen dann stationäre oder Stillstands-Punkte, die entsprechenden Oskulationsebenen ebenfalls stationäre oder Stillstands-Ebenen, sie sind die Analoga zu den Wendepunkten einer ebenen Kurve. Es ergibt die Gleichung (8), **daß eine Raumkurve im allgemeinen eine diskrete Gruppe von Stillstandspunkten** (bzw. Ebenen) **hat.**

196. Ebenso wie bei den ebenen Kurven (vgl. Nr. 183) so gibt auch bei einer Raumkurve Γ der von den Tangenten in den Endpunkten P und Q eines Bogens gebildete Winkel, die Ablenkung der Kurve von der geraden Richtung auf die Länge dieses Bogens an. Das Verhältnis zwischen dem Bogen eines größten Kreises der Kugel vom Radius 1, der zwischen den zu jenen Tangenten parallelen Radien liegt, und dem Bogen PQ der Kurve Γ heißt die mittlere Krümmung der Kurve. Nähert sich nun der Endpunkt Q dem Punkte P

bis auf eine unendlich kleine Entfernung, so strebt dies Verhältnis einem, im allgemeinen bestimmten und endlichen Grenzwerte zu, der die (erste)[1]) Krümmung der Kurve im Punkte P heißt, und dessen reziproker Wert der Krümmungsradius ist. Um die Existenz dieses Grenzwertes nachzuweisen und rechnerisch zu bestimmen, dient ein dem in Nr. 183 ähnliches Verfahren. Bezeichnen wir den Wert mit $\frac{1}{R}$, so findet sich

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{\begin{Vmatrix} \xi'(t) & \eta'(t) & \zeta'(t) \\ \xi''(t) & \eta''(t) & \zeta''(t) \end{Vmatrix}^2}}{\{\overline{\xi'(t)}^2 + \overline{\eta'(t)}^2 + \overline{\zeta'(t)}^2\}^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{R} = \tag{9}$$

$$\frac{\sqrt{[\overline{\xi'(t)}^2 + \overline{\eta'(t)}^2 + \overline{\zeta'(t)}^2]\,[\overline{\xi''(t)}^2 + \overline{\eta''(t)}^2 + \overline{\zeta''(t)}^2] - [\xi'(t)\xi''(t) + \eta'(t)\eta''(t) + \zeta'(t)\zeta''(t)]^2}}{[\overline{\xi'(t)}^2 + \overline{\eta'(t)}^2 + \overline{\zeta'(t)}^2]^{\frac{3}{2}}}$$

ein Ausdruck, dessen Analogie mit dem von (17) in Nr. 181 offenbar ist. Nimmt man insbesondere die Bogenlänge s als Parameter, so ist, weil dann (vgl. Nr. 190) identisch

$$\overline{\xi'(t)}^2 + \overline{\eta'(t)}^2 + \overline{\zeta'(t)}^2 = 1,$$

und demzufolge

$$\xi'(t)\xi''(t) + \eta'(t)\eta''(t) + \zeta'(t)\zeta''(t) = 0;$$

und daher

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\overline{\xi''(s)}^2 + \overline{\eta''(s)}^2 + \overline{\zeta''(s)}^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \tag{9'}$$

§ 2. Einhüllende von ∞^1 Ebenen.

197. Wir haben gesehen, daß wenn eine Kurve im Raume als Kontinuum von ∞^1 Punkten gegeben ist, dadurch 1) ∞^1 Geraden bestimmt sind, nämlich die Tangenten dieser Kurve und 2) eine Reihe von ∞^1 Ebenen, nämlich die Schmiegungsebenen der Kurve. Jede Tangente kann als Verbindungslinie zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Punkte, jede Schmiegungsebene als Verbindungsebene (zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Tangenten, oder) dreier unendlich naher Punkte der Kurve aufgefaßt werden. Daher schneiden sich zwei aufeinanderfolgende Schmiegungsebenen in einer Tangente, und drei solche in einem Punkte der Kurve. Läßt sich nun dieses Gebilde, das aus ∞^1 Punkten besteht, ∞^1 Geraden und ∞^1 Ebenen liefert, nicht auch entstanden denken, indem man umgekehrt von einer stetigen Folge von ∞^1 Ebenen ausgeht? — Um diese Frage zu beantworten, die offenbar analog der in Nr. 184 behandelten ist, beachten wir, daß eine derartige Ebenen-Folge immer durch eine Gleichung folgender Art dargestellt werden kann:

---

1) Zum Unterschied von der zweiten Krümmung oder Torsion, worüber wir aber nicht sprechen werden.

$$\varphi(t)\cdot x+\psi(t)\cdot y+\chi(t)\cdot z+\omega(t)=0 \quad . \quad . \quad . \quad \textbf{(10)}$$

wo φ, ψ, χ, ω vier gegebene Funktionen der unabhängigen Variablen t (des Parameters) bedeuten. Wir betrachten nun die Lagen π_0 und π_1 der beweglichen Ebene, die den Werten t_0 und t_0+h des Parameters t entsprechen; die Gerade, in der sie sich schneiden, wird dann durch das System der beiden Gleichungen

$$\varphi(t_0)\cdot x+\psi(t_0)y+\chi(t_0)\cdot z+\omega(t_0)=0,$$
$$\varphi(t_0+h)\cdot x+\psi(t_0+h)\cdot y+\chi(t_0+h)\cdot z+\omega(t_0+h)=0$$

dargestellt. Nehmen wir nun an, daß h eine sehr kleine Größe sei, und θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 Größen seien zwischen 0 und 1 gelegen, so ist

$$\varphi(t_0+h)=\varphi(t_0)+h\varphi'(t_0+\theta_1 h),\ \ \psi(t_0+h)=\psi(t_0)+h\psi'(t_0+\theta_2 h)$$
$$\chi(t_0+h)=\chi(t_0)+h\chi'(t_0+\theta_3 h),\ \ \omega(t_0+h)=\omega(t_0)+h\omega'(t_0+\theta_4 h);$$

folglich wird die zweite der beiden vorigen Gleichungen zu

$$[\varphi(t_0)\cdot x+\psi(t_0)\cdot y+\chi(t_0)\cdot z+\omega(t_0)]$$
$$+h[\varphi'(t_0+\theta_1 h)\cdot x+\psi'(t_0+\theta_2 h)\cdot y+\chi'(t_0+\theta_3 h)\cdot z+\omega'(t_0+\theta_4 h)]=0,$$

und wegen der ersten jener Gleichungen ist

$$\varphi'(t_0+\theta_1 h)+\psi'(t_0+\theta_2 h)\cdot y+\chi'(t_0+\theta h)\cdot z+\omega'(t_0+\theta_4 h)=0.$$

Wenn nun h gegen Null konvergiert, mit anderen Worten, wenn π_1 sich der π_0 unendlich nähert, so geht die Gerade $\pi_0\pi_1$ über in die durch die beiden folgenden Gleichungen dargestellte

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(t_0)\cdot x+\psi(t_0)\cdot y+\chi(t_0)\cdot z+\omega(t_0)=0,\\ \varphi'(t_0)\cdot x+\psi'(t_0)\cdot y+\chi'(t_0)\cdot z+\omega'(t_0)=0.\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad \textbf{(11)}$$

Bei Variation von t_0 stellt dieses Gleichungspaar eine Reihe von ∞^1 Geraden dar, von denen jede — aus einem Grunde den wir in Kap. IV des folgenden Buches erkennen werden — die Berührungsgerade der Ebene (t_0) der Folge (10) mit ihrer eigenen Einhüllenden genannt wird. — Wir betrachten nun den Punkt P, in welchem die durch (11) dargestellte Gerade g von der Ebene π_1 geschnitten wird, die in jener Folge dem Parameter $t=t_0+h$ entspricht; die Koordinaten jenes Punktes erhalten wir, wenn wir das System der Gleichungen gebildet aus (11) und der folgenden nach x, y, z auflösen, nämlich

$$\varphi(t_0+h)\cdot x+\psi(t_0+h)\cdot y+\chi(t_0+h)\cdot z+\omega(t_0+h)=0.$$

Nehmen wir an, daß h sehr klein ist, so können wir diese ersetzen durch

$$[\varphi(t_0)\cdot x+\psi(t_0)\cdot y+\chi(t_0)z+\omega(t_0)]+h[\varphi'(t_0)\cdot x+\psi'(t_0)\cdot y+\chi'(t_0)\cdot z+\omega'(t_0)]$$
$$+\frac{h^2}{2!}[\varphi''(t_0+\theta_1 h)\cdot x+\psi''(t_0+\theta_2 h)\cdot y+\chi''(t_0+\theta_3 h)\cdot z+\omega''(t_0+\theta_4 h)]=0,$$

oder, wenn wir die Gl. (11) berücksichtigen:

$$\varphi''(t_0+\theta_1 h)\cdot x+\psi''(t_0+\theta_2 h)\cdot y+\chi''(t_0+\theta_3 h)\cdot z+\omega''(t_0+\theta_4 h)=0.$$

Lassen wir nun die Größe h gegen Null konvergieren, so erhält der Punkt $\pi_1 g$ eine im allgemeinen bestimmte und einzige Lage, nämlich die des Punktes, dessen Koordinaten man durch Auflösung des Systems der drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t_0)\cdot x + \psi(t_0)\cdot y + \chi(t_0)\cdot z + \omega(t_0) &= 0, \\ \varphi'(t_0)\cdot x + \psi'(t_0)\cdot y + \chi'(t_0)\cdot z + \omega'(t_0) &= 0, \\ \varphi''(t_0)\cdot x + \psi''(t_0)\cdot y + \chi''(t_0)\cdot z + \omega''(t_0) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (12)$$

erhält. Nun nimmt mit Variation von t_0 der Punkt eine Reihe von ∞^1 Lagen an, deren geometrischer Ort eine Kurve ist, deren parametrische Darstellung durch Auflösung der Gl. (12) nach x, y, z sich ergibt, und an die die Geraden (11) Tangenten, und die Ebenen (10) Schmiegungsebenen sind. Dies ließe sich auch durch eine Rechnung zeigen, die wir der Kürze wegen unterdrücken wollen. — Indem wir so den umgekehrten Weg wie früher eingeschlagen haben, sind wir von neuem zu dem System bestehend aus ∞^1 Punkten, ∞^1 Geraden, ∞^1 Ebenen gelangt, das wir vorhin untersucht haben. Dies System ist daher zu sich selber dual, und daher entsprechen sich seine deskriptiven Eigenschaften und seine Elemente paarweise nach dem Gesetze der Dualität im Raume, z. B. den vielfachen Punkten entsprechen vielfache Schmiegungsebenen usw.

Die ∞^2 Punkte der ∞^1 Geraden des Systems bilden eine abwickelbare Fläche, für welche, wie wir später sehen werden, die Ebenen des Systems Berührungsebenen sind. Die gegebene Kurve bildet für die Fläche eine sog. Rückkehrkante; weshalb sie so heißt, ergibt sich aus folgenden Bemerkungen: Wir schneiden die abwickelbare Fläche mit einer beliebigen Ebene π, die Schnittkurve Σ wird umhüllt von den ∞^1 Geraden, in denen die π die Ebenen des Systems schneidet. Der Kurve Σ gehören insbesondere auch die Punkte an, in denen die ursprüngliche Kurve Γ die π schneidet. Es sei nun P ein solcher Punkt: insofern er der Kurve Γ angehört, ist er der Schnittpunkt dreier aufeinanderfolgender Schmiegungsebenen; insofern er dagegen der Kurve Σ angehört, gehen durch ihn drei aufeinanderfolgende Tangenten dieser Kurve, also dürfen wir schließen (vgl. Nr. 184), daß P ein Rückkehrpunkt der Kurve Σ ist. Wir sehen also, daß alle Punkte P der Kurve Γ für alle, in den durch sie hindurchgehenden Ebenen liegenden Schnittkurven der abwickelbaren Fläche Rückkehrpunkte sind, und somit verdient Γ den Namen „Rückkehrkante".

§ 3. Projektion einer Raumkurve von einem Punkte auf eine Ebene.

198. Wir nehmen wieder die Betrachtung der Kurve Γ auf, die dargestellt wird durch die Gleichungen

$$x = \xi(t), \qquad y = \eta(t), \qquad z = \zeta(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$



und denken uns diese von einem beliebigen Punkte $C(a, b, c)$ auf eine beliebige Ebene projiziert. Als solche dürfen wir ruhig die xy-Ebene nehmen, weil ja über die Lage des Koordinatensystems in bezug auf die Kurve und den Punkt C gar keine besonderen Bedingungen gestellt sind; wir erhalten dann eine Kurve Γ', deren parametrische Darstellung, wie leicht zu erkennen, folgende ist

$$x = \frac{a \cdot \zeta(t) - c \cdot \xi(t)}{\zeta(t) - c}, \qquad y = \frac{b \cdot \zeta(t) - c \cdot \eta(t)}{\zeta(t) - c}. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Befindet sich das Projektionszentrum C im unendlich fernen Punkte der Geraden, die die Richtungskosinusse $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ hat, so erhalten wir an Stelle von (2) die Gleichungen

$$x = \xi(t) - \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\,\zeta(t), \qquad y = \eta(t) - \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\,\zeta(t). \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Im speziellen, wenn wir orthogonal auf die xy-Ebene projizieren $\left(\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}\right)$, so wird die Kurve Γ', wie wir schon wissen (Nr. 192), einfach dargestellt durch

$$x = \xi(t), \qquad y = \eta(t). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die rechten Seiten der Gl. (2) bzw. (3) wollen wir der Kürze halber einfach als $\varphi(t)$ und $\chi(t)$ darstellen.

Hat nun die Kurve Γ einen Doppelpunkt D, der den Werten t_0 und t_1 des Parameters t entspricht, so muß sein

$$\xi(t_0) = \xi(t_1), \qquad \eta(t_0) = \eta(t_1), \qquad \zeta(t_0) = \zeta(t_1)$$

und infolge dessen ist auch $\varphi(t_0) = \varphi(t_1)$, $\chi(t_0) = \chi(t_1)$; infolge dessen ist auch die Projektion D' von D ein Doppelpunkt von Γ'. Aber ein Doppelpunkt von Γ' kann auch dadurch entstehen, daß ein Projektionsstrahl Γ zwei (oder mehrmal) trifft, also dadurch, daß eine Sehne von Γ durch C geht. Da nun (vgl. Nr. 193) im allgemeinen eine bestimmte Gruppe solcher Sehnen durch C geht, so **besitzt die Projektion einer Kurve doppelter Krümmung im allgemeinen immer Doppelpunkte**, und ist deswegen eine spezialisierte Kurve, wie sich aus Nr. 181 ergibt. **Knoten** entstehen durch reelle Sehnen, isolierte Punkte durch ideelle Sehnen (vgl. Nr. 193)[1]). Man kann ferner sagen: **Ein Doppelpunkt in der Projektion einer Raumkurve kann nur entstehen entweder als Projektion eines Doppelpunktes der ersteren, oder als Spurpunkt einer**

---

1) Es kann vorkommen, daß die Projektion einer Kurve einen Zweig enthält, der ganz aus isolierten Punkten besteht. Betrachtet man z. B. die Kurve Γ, in der ein Kegel mit der Spitze C eine bel. Kugel schneidet; im allgemeinen werden unzählige Erzeugende die Kugel in reellen Punkten schneiden, unzählige andere sie nicht schneiden. Jede dieser letzteren liefert einen isolierten Punkt, infolge dessen haben wir einen reellen Zweig von Γ', als Projektion eines imaginären Zweiges von Γ. Es kann auch vorkommen, daß eine ganz imaginäre Raumkurve als Projektion von einem bestimmten Punkte aus eine reelle Kurve hat.

durch das Projektionszentrum gehenden, die Kurve zweimal schneidenden Sehne, sog. scheinbarer Doppelpunkt der Raumkurve. In der der Tat, wenn ein Punkt von Γ' doppelt ist, so muß es (vgl. Nr. 183) ein Wertepaar t_0, t_1 des Parameters t geben, derart, daß

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_0), \qquad \psi(t_1) = \psi(t_0),$$

oder wegen (2)

$$\frac{a\zeta(t_1) - c\xi(t_1)}{\zeta(t_1) - c} = \frac{a\zeta(t_0) - e\xi(t_0)}{\zeta(t_0) - c}, \qquad \frac{b\zeta(t_1) - c\eta(t_1)}{\zeta(t_1) - c} = \frac{b \cdot \zeta(t_0) - c \cdot \eta(t_0)}{\zeta(t_0) - c};$$

nun können diese Gleichungen, wie folgt, geschrieben werden:

$$\frac{a - \xi(t_0)}{a - \xi(t_1)} = \frac{b - \eta(t_0)}{b - \eta(t_1)} = \frac{c - \zeta(t_0)}{c - \zeta(t_1)};$$

augenscheinlich werden sie, wenn

$$\xi(t_0) = \xi(t_1), \qquad \eta(t_0) = \eta(t_1), \qquad \zeta(t_0) = \zeta(t_1),$$

identisch befriedigt, d. h. wenn t_0, t_1 die Parameter eines Doppelpunktes von Γ sind; im allgemeinen drücken sie aus, daß die zwei Kurvenpunkte t_0 und t_1 mit dem Projektionszentrum C in gerader Linie liegen; der Satz ist also erwiesen.

199. Die Gleichung der Tangenten von Γ' ergeben sich aus ihrer parametrischen Darstellung (2) oder (3), also

$$\begin{vmatrix} x - a & y - b & -c \\ \xi(t) - a & \eta(t) - b & \zeta(t) - c \\ \xi'(t) & \eta'(t) & \zeta'(t) \end{vmatrix} = 0.$$

oder

$$\begin{vmatrix} x - \xi(t) & y - \eta(t) & z - \zeta(t) \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \xi'(t) & \eta'(t) & \zeta'(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Nun stellt diese Gleichung die Spurlinie der die Tangente in P an Γ von C aus projizierenden Ebene mit der xy-Ebene dar, folglich: **Die Projektion der Tangente einer Raumkurve Γ in einem Punkte P ist zugleich die Tangente an die Projektion Γ' in dem Punkte P', der die Projektion von P ist.** Es ist zu beachten, daß dieser Satz **nicht** umkehrbar ist; nämlich wenn eine Gerade g' in der Bildebene Tangente an Γ' ist, so bedeutet dies nur, daß die Gerade g in der g' projizierenden Ebene liegt. Nun ist diese Ebene aber eine Berührungsebene der Kurve Γ; betrachtet man daher zwei Projektionen der Kurve Γ, etwa Γ' und Γ'', und sind g' und g'' Tangenten an Γ' bzw. Γ'' in Punkten, die die Projektion des nämlichen Punktes P von Γ sind, dann ist die zugehörige Gerade g, da sie der Schnitt zweier Tangentialebenen im nämlichen Punkte P von Γ ist, sicherlich eine Tangente von Γ in P.

Der obige Satz gilt auch für jede Tangente in P, wenn dieser ein

vielfacher Punkt ist. Ist z. B. P ein Knoten mit zusammenfallenden Tangenten, so ist P' im allgemeinen eine Spitze (vgl. Nr. 200).

Wenn die Tangenten in zwei verschiedenen Punkten von Γ in derselben projizierenden Ebene liegen, so hat die Projektion Γ' die Spur dieser Ebene in der Bildebene als Doppeltangente.

Wir wollen jetzt annehmen, daß der Punkt von Γ', der dem Parameter t entspricht, ein Wendepunkt der Kurve (2)[1] sei, und daß

$$AX + BY + C = 0$$

die Wendetangente sei; dann müssen (vgl. Nr. 179) die Gleichungen bestehen

$$\begin{aligned} A[a\cdot\zeta(t) - c\cdot\xi(t)] + B[b\cdot\zeta(t) - c\cdot\eta(t)] + C[\zeta(t) - c] &= 0, \\ A[a\cdot\zeta'(t) - c\cdot\xi'(t)] + B[b\cdot\zeta'(t) - c\cdot\eta'(t)] + C\cdot\zeta'(t) &= 0, \\ A[a\cdot\zeta''(t) - c\cdot\xi''(t)] + B[b\cdot\zeta''(t) - c\cdot\eta''(t)] + C\cdot\zeta''(t) &= 0. \end{aligned}$$

Eliminiert man hieraus die A, B, C, so findet man

$$\begin{vmatrix} a\cdot\zeta(t) - c\cdot\xi(t) & b\cdot\zeta(t) - c\cdot\xi(t) & \zeta(t) - c \\ a\cdot\zeta'(t) - c\cdot\xi'(t) & b\cdot\zeta'(t) - c\cdot\xi'(t) & \zeta'(t) \\ a\cdot\zeta''(t) - c\cdot\xi''(t) & b\cdot\zeta''(t) - c\cdot\xi''(t) & \zeta''(t) \end{vmatrix} = 0,$$

oder nach einigen leichten Reduktionen

$$\begin{vmatrix} a - \xi(t) & b - \eta(t) & k - \zeta(t) \\ \xi'(t) & \eta'(t) & \zeta'(t) \\ \xi''(t) & \eta''(t) & \zeta''(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung der Werte der Parameter, die den Wendepunkten in der Projektionskurve entsprechen; nun sagt uns diese, wenn wir sie mit Gl. (7) in Nr. 194 vergleichen, daß diese Punkte die Projektionen derjenigen Punkte von Γ sind, deren zugehörige Schmiegungsebenen durch das Projektionszentrum $C(a, b, c)$ gehen; also: **Um die Wendepunkte der Projektionen einer Raumkurve zu erhalten, braucht man nur die Schmiegungsebenen vom Projektionszentrum aus anzulegen und deren Berührungspunkte zu projizieren.** Umgekehrt: läuft die Bestimmung der Schmiegungsebenen von einem Punkte an die Raumkurve darauf hinaus, in der Projektion auf eine beliebige Ebene von diesem Punkte aus die Wendepunkte zu bestimmen.

200. Das vorhin erhaltene Resultat läßt sich auch in folgender Weise ausdrücken: **Legt man das Projektionszentrum in die Schmiegungsebene einer Raumkurve Γ im Punkte P, so hat die Projektion Γ' den Punkt P' als Wendepunkt, und die Spur jener Schmiegungsebene ist die Wendetangente.** Hingegen ergibt sich aus den Betrachtungen auf S. 95: **Legt man das Projektionszentrum auf die Ver-**

---

[1]) Ähnliche Überlegungen können auf die Kurve (3) angewendet werden.

bindungslinie zweier beliebiger Punkte P und Q einer Raumkurve, so hat die Projektion Γ' die Projektion $P' \equiv Q'$ als Doppelpunkte; die zugehörigen Tangenten sind die Projektionen der beiden Tangenten in P und Q an die Raumkurve.

Es entsteht nun noch die Frage: **Wie verhält sich die Kurve Γ' in P', wenn wir das Projektionszentrum C auf die Tangente an Γ in P legen?** — Bezeichnen wir, um dies zu beantworten, den Parameter des Punktes P mit t_0, dann nehmen die Koordinaten von C die Gestalt an (vgl. Gl. 3).

$$a = \xi(t_0) + \varrho\,\xi'(t_0), \quad b = \eta(t_0) + \varrho \cdot \eta'(t_0'), \quad c = \zeta(t_0) + \varrho \cdot \zeta'(t_0) \qquad (5)$$

und die Gl. (2)[1]) liefern dann als Koordinaten von P'

$$\varphi(t_0) = \frac{\begin{vmatrix} \xi'(t_0) & \xi(t_0) \\ \zeta'(t_0) & \zeta(t_0) \end{vmatrix}}{\zeta'(t_0)}, \qquad \chi(t_0) = \frac{\begin{vmatrix} \eta'(t_0) & \eta(t_0) \\ \zeta'(t_0) & \zeta(t_0) \end{vmatrix}}{\zeta'(t_0)} \quad . \quad . \qquad (6)$$

Wir differenzieren Gl. (2) und erhalten dann

$$\varphi'(t) = \frac{c}{[\zeta(t) - c]^2} \begin{vmatrix} a & \xi(t) & \xi'(t) \\ c & \zeta(t) & \zeta'(t) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \chi'(t) = \frac{c}{[\zeta(t) - c]^2} \begin{vmatrix} b & \eta(t) & \eta'(t) \\ c & \zeta(t) & \zeta'(t) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \qquad (7)$$

Ersetzen wir hierin a, b, c durch die aus (5) stammenden Werte, und t durch t_0, so sehen wir, daß dann

$$\varphi'(t_0) = 0, \quad \chi'(t_0) = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (8)$$

und dies zeigt uns, daß P' eine Spitze wird.[2]) Es soll nun noch die Spitzentangente gesucht werden. Zu dem Zwecke beachten wir, daß eine zweite Differentiation von (7) liefert:

$$\varphi''(t) = \frac{2\zeta'(t)}{[\zeta(t) - c]^3} \begin{vmatrix} a & \xi(t) & \xi(t') \\ c & \zeta(t) & \zeta'(t) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \frac{c}{[\zeta(t) - c]^2} \begin{vmatrix} a & \xi(t) & \xi'(t) \\ c & \zeta(t) & \zeta'(t) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}'$$

wo der Strichel $'$ die Ableitung nach t bedeuten soll; oder wegen (7)

$$\varphi''(t) = -\frac{2\zeta'(t) \cdot \varphi'(t)}{\zeta(t) - c} + \frac{c}{[\zeta(t) - c]^2} \begin{vmatrix} a & \xi(t) & \xi''(t) \\ c & \zeta(t) & \zeta''(t) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}' .$$

Setzen wir nun an Stelle von a und c ihre Werte (5), lassen t zu t_0 werden und berücksichtigen auch die Gl. (8), so erhalten wir

---

1) Ähnliches gilt von Kurve (3).

2) Dies Resultat ließ sich auch voraussehen, wenn man bei den letzten zu Anfang dieser Nr. gewonnenen Sätzen den Übergang zur Grenze macht.

$$\left.\begin{aligned}\varphi''(t_0) &= -\frac{\varrho c}{\zeta'(t_0)^2}\begin{vmatrix}\xi'(t_0) & \xi''(t_0)\\ \zeta'(t_0) & \zeta''(t_0)\end{vmatrix}\\ &\text{und in gleicher Weise}\\ \chi''(t_0) &= -\frac{\varrho c}{\zeta'(t_0)^2}\begin{vmatrix}\eta'(t_0) & \eta''(t_0)\\ \zeta'(t_0) & \zeta''(t_0)\end{vmatrix}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Es ist aber die Gleichung der Spitzentangente

$$\frac{x-\varphi(t_0)}{\varphi''(t_0)} = \frac{y-\chi(t_0)}{\chi''(t^0)},$$

und daher wegen der für $\varphi''(t_0)$ und $\chi''(t_0)$ gefundenen Werte

$$\frac{x+\frac{1}{\zeta'(t_0)}\begin{vmatrix}\xi'(t_0) & \xi(t_0)\\ \zeta'(t_0) & \zeta(t_0)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\xi'(t_0) & \xi''(t_0)\\ \zeta'(t_0) & \zeta''(t_0)\end{vmatrix}} = \frac{y+\frac{1}{\zeta'(t_0)}\begin{vmatrix}\eta'(t_0) & \eta(t_0)\\ \zeta'(t_0) & \zeta(t_0)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\eta'(t_0) & \eta''(t_0)\\ \zeta'(t_0) & \zeta''(t_0)\end{vmatrix}},$$

oder nach einigen leichten Umformungen

$$\begin{vmatrix}x-\xi(t_0) & y-\eta(t_0) & -\zeta(t_0)\\ \xi'(t_0) & \eta'(t_0) & \zeta'(t_0)\\ \xi''(t_0) & \eta''(t_0) & \zeta''(t_0)\end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung stellt nun die Schnittlinie der Oskulationsebene des Punktes P mit der xy-Ebene dar; folglich kann man sagen: **Projiziert man eine Raumkurve Γ von einem auf irgend einer ihrer Tangenten (die sie in P berühren möge) gelegenen Punkte auf irgend eine Ebene, so erhält man eine Kurve Γ', die in P' eine Spitze hat; die Spitzentangente ist der Schnitt der Schmiegungsebene in P mit der Bildebene.** Wenn daher das Projektionszentrum nicht auf einer Tangente liegt, so wird die Projektion keine Spitzen haben, es sei denn, daß Γ selber eine Spitze hätte.

201. Zwischen der Krümmung $\frac{1}{R}$ einer Raumkurve Γ in einem Punkte P und der ihrer Projektion Γ' in dem entsprechenden Punkte P', nämlich $\frac{1}{r}$, besteht eine wichtige Beziehung, die man leicht nachweisen kann, wenn man, was ja erlaubt ist, als Bildebene die xy-Ebene des kartesischen Systems nimmt, auf welches die Kurve bezogen wurde. Ist nämlich die parametrische Darstellung von Γ die folgende:

$$x = \xi(s), \qquad y = \eta(s), \qquad z = \zeta(s), \quad \ldots \quad (1)$$

wo s den Bogen bedeutet, und sind a, b, c, die Koordinaten des Projektionszentrums C, so wird ja, wie wir sahen, Γ' dargestellt durch

$$x = \frac{c\xi - a\zeta}{c-\zeta}, \qquad y = \frac{c\eta - b\zeta}{c-\zeta}, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

wobei wir uns einer einfacheren Schreibweise bedient haben. Ist nun

p der Abstand des Punktes C von der Schmiegungsebene in P, so ist nach Gl. (9′) S. 101

$$p = \begin{vmatrix} a-\xi & \xi' & \xi'' \\ b-\eta & \eta' & \eta'' \\ c-\zeta & \zeta' & \zeta'' \end{vmatrix} : \sqrt{\begin{vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix}^2} = R \begin{vmatrix} a-\xi & \xi' & \xi'' \\ b-\eta & \eta' & \eta'' \\ c-\zeta & \zeta' & \zeta'' \end{vmatrix},$$

oder umgekehrt

$$\begin{vmatrix} a-\xi & \xi' & \xi'' \\ b-\eta & \eta' & \eta'' \\ c-\zeta & \zeta' & \zeta'' \end{vmatrix} = \frac{p}{R}.$$

Nennen wir nun den Spurpunkt der Tangente in P an Γ mit der xy-Ebene T, und bezeichnen die Längen von TP und TP' mit l und l', so findet man unschwer

$$l = \frac{\zeta\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}}{\zeta'} = \frac{\zeta}{\zeta'},$$

$$l' = \frac{\zeta\{[(a-\xi)\zeta'-(c-\zeta)\xi']^2+[(b-\eta)\zeta'-(c-\zeta)\eta']^2\}^{\frac{1}{2}}}{\zeta'(c-\zeta)^2}.$$

Nachdem dies festgestellt, folgt aus Gl. (17) S. 72 und der parametrischen Darstellung von Γ'

$$r = \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-x''y'} = \frac{\frac{c^3}{(c-\zeta)^6}\{[(a-\xi)\zeta'-(c-\zeta)\xi']^2+[(b-\eta)\zeta'-(c-\zeta)\eta']^2\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{c^2}{(c-\zeta)^3}\begin{vmatrix} a-\xi & \xi' & \xi'' \\ b-\eta & \eta' & \eta'' \\ c-\zeta & \zeta' & \zeta'' \end{vmatrix}}$$

und daher wegen der vorigen Formeln

$$r = \frac{c}{(c-\zeta)^3}\,\frac{R}{p}\,\frac{\zeta'^3(c-\zeta)^3}{\zeta^3}\,l'^3,$$

oder

$$\frac{r}{R} = \frac{c}{p}\left(\frac{l'}{l}\right)^3. \qquad (10)$$

Dies ist die gesuchte Beziehung zwischen r und R. Aus ihr geht hervor:

I. Soll $r=0$ sein, so muß auch $l'=0$ sein, d. h. die Tangente im Punkte P muß durch das Projektionszentrum gehen; alsdann ist P' eine Spitze von Γ', was mit den früheren Ableitungen in Übereinstimmung steht.

II. Soll hingegen $r=\infty$ werden, so muß (da ja l nicht gleich Null werden kann, weil P nicht auf der Projektionsebene liegt) $p=0$ sein; d. h. die Schmiegungsebene in P muß das Projektionszentrum enthalten; alsdann ist P' ein Wendepunkt, was ebenfalls mit den früher erhaltenen Resultaten übereinstimmt.

III. zeigt die Gl. (10): **Haben zwei Kurven in einem gemeinsamen Punkte dieselbe Tangente und dieselbe Schmiegungsebene, so**

ist das Verhältnis ihrer Krümmungen in jenem Punkte gleich dem Verhältnisse der Krümmungen ihrer Projektionen von einem beliebigen Zentrum auf eine beliebige Ebene.

Betrachten wir ferner eine zweite Raumkurve Γ_1, die ebenfalls Γ' zur Projektion hat, und zwar derart, daß die Tangente im Punkte P_1, der dem Punkte P entspricht, gleichfalls den Spurpunkt T hat, dann ist

$$\frac{r}{R_1} = \frac{c}{p_1}\left(\frac{l'}{l_1}\right)^3;$$

kombinieren wir diese Formel mit der vorigen (10), so wird

$$\frac{R}{R_1} = \frac{p}{p_1}\left(\frac{l}{l_1}\right)^3. \qquad \text{(11)}$$

Es ist dies eine wichtige von Peaucellier[1]) entdeckte Formel, die eine elegante Beziehung zwischen den Krümmungen in entsprechenden Punkten P, P_1 zweier auf demselben Kegel gelegenen Raumkurven darstellt. Hier sind dann p und p_1 die Abstände der Kegelspitze von den Schmiegungsebenen in P und P_1, während l und l_1 die Abstände dieser Punkte von dem Schnittpunkte der zugehörigen Kurventangenten sind.

Aus der Formel (10) läßt sich für den Fall der Orthogonalprojektion eine andere herleiten. Ist π die Bildebene, τ die Schmiegungsebene im Punkte P von Γ und s die Gerade $\pi\tau$, so hat man allgemein

$$\frac{c}{p} = \frac{\sin(Cs, \pi)}{\sin(Cs, \tau)},$$

folglich, wenn C in zu π senkrechter Richtung ins Unendliche geht, so geht das Verhältnis $\frac{c}{p}$ über in $\frac{1}{\cos(\tau\pi)}$; dagegen wird in diesem Falle das Verhältnis $\frac{l'}{l}$ der Kosinus des Winkels der Tangenten t, t' an Γ und Γ' in P, P', das ist der Winkel, den t mit der Bildebene π macht. Wir erhalten daher die Beziehung

$$\frac{r}{R} = \frac{\cos^3(t\pi)}{\cos(\tau\pi)} \qquad \text{(12)}$$

und diese drückt den folgenden **Satz von Bellavitis** aus: **Die Krümmungen in zwei entsprechenden Punkten einer Raumkurve und ihrer Orthogonalprojektion verhalten sich wie der Kubus des Kosinus des Winkels zwischen Tangente und Bildebene zum Kosinus des Winkels zwischen Schmiegungs- und Bildebene.**[2])

Zur Übung: Man leite diesen Satz direkt ab.

§ 4. Algebraische Raumkurven.

202. Wir nennen eine Raumkurve nur dann algebraisch, wenn sie von jedem beliebigen Punkte des Raumes durch einen algebraischen

1) *Relation entre les rayons de courbure d'une courbe et de sa perspective.* Nouv. Ann. de Math. B. XX, 1860. S. 427—429.

2) *Lezioni di geometria descrittiva* (Padova, 1851) S. 241.

Kegel projiziert wird. Aus dieser Definition ergibt sich, daß **alle Projektionen einer algebraischen Raumkurve auch algebraische ebene Kurven sind.**

Eine algebraische Raumkurve kann ebenso wie jede andere, in kartesischen Koordinaten, vermittels eines Parameters t durch Gleichungen von folgendem Typus dargestellt werden.

$$x = \xi(t), \qquad y = \eta(t), \qquad z = \zeta(t). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die Gerade, die den Punkt P mit dem Parameter t von dem $C(a, b, c)$ aus projiziert, hat die Gleichungen

$$\frac{X - a}{a - \xi(t)} = \frac{Y - b}{b - \eta(t)} = \frac{Z - c}{c - \zeta(t)},$$

wo X, Y, Z die laufenden Koordinaten sind. Die Differenzen $a - \xi(t)$, $b - \eta(t)$, $c - \zeta(t)$ können aufgefaßt werden als homogene Koordinaten der dem Strahlenbündel mit dem Zentrum C zugehörigen Geraden CP, alsdann ist diese Gerade Erzeugende eines algebraischen Kegels und daher können (s. S. 76) ihre Koordinaten als rationale Funktionen zweier Parameter u und v, die durch eine algebraische Beziehung verknüpft sind, ausgedrückt werden. Es bestehen demnach Gleichungen von folgendem Typus

$$\frac{a - \xi(t)}{\varphi(u, v)} = \frac{b - \eta(t)}{\chi(u, v)} = \frac{c - \zeta(t)}{\psi(u, v)}, \qquad f(u, v) = 0,$$

oder wegen Gl. (1)

$$\frac{a - x}{\varphi(u, v)} = \frac{b - y}{\chi(u, v)} = \frac{c - z}{\psi(u, v)}, \qquad f(u, v) = 0.$$

Bezeichnen wir nun mit $-\tau$ den gemeinsamen Wert dieser drei Bruchfunktionen (der eine Funktion von x, y, z, u, v ist), so erhalten wir

$$x = a + \tau \cdot \varphi(u, v), \qquad y = b + \tau \cdot \chi(u, v), \qquad z = c + \tau \cdot \psi(u, v). \quad (2)$$
$$f(u, v) = 0.$$

Eliminieren wir nun aus der ersten, zweiten und vierten Gleichung die Parameter u und v, so erhalten wir die Gleichung der Projektion der gegebenen Kurve auf die xy-Ebene; diese wird, da die Kurve algebraisch ist, auch algebraisch sein, und dies erfordert, daß τ eine algebraische Funktion von u und v sei, so daß eine Gleichung besteht von der Form

$$\omega(u, v, \tau) = 0,$$

wo ω das Symbol einer ganzen rationalen Funktion bedeutet. Um die Natur dieser Funktion genauer zu bestimmen, betrachten wir wiederum den Kegel, der die Kurve von dem Punkte C aus projiziert. Seine Erzeugenden lassen sich durch folgende Gleichungen darstellen:

$$\frac{X - a}{\varphi(u, v)} = \frac{Y - b}{\chi(u, v)} = \frac{Z - c}{\psi(u, v)}, \qquad f(u, v) = 0.$$



Folglich kann der Kegel selbst durch die Gleichungen dargestellt werden:

$$\left.\begin{array}{c} X = a + \varrho \cdot \varphi(u, v), \quad Y = b + \varrho \cdot \chi(u, v), \quad Z = c + \varrho \cdot \psi(u, v), \\ f(u, v) = 0, \end{array}\right\} \quad (3)$$

wo u, v mit den Erzeugenden variieren, während ϱ von Punkt zu Punkt auf einer und derselben Erzeugenden variiert. Da nun C ein beliebiger Punkt des Raumes ist, so gibt es auf jeder Erzeugenden im allgemeinen nur einen einzigen Punkt der Kurve. Vergleichen wir übrigens die Gleichungen (2) der Kurve mit den Gl. (3) des Kegels, so sehen wir, daß, um den Punkt der ersteren, der auf einer Erzeugenden des letzteren liegt, zu erhalten, es genügt $\varrho = \tau$ zu setzen. τ muß also eine eindeutige Funktion von u, v sein, und dies bedingt, daß die Gleichung $\omega(u, v, \tau) = 0$, weil ja $f(u, v) = 0$ sein muß, sich immer auf die Form zurückführen läßt

$$g(u, v) - \tau \cdot h(u, v) = 0,$$

wo g und h ganze Polynome in u, v sind. Die Gl. (2) werden dann

$$x = a + \frac{h(u, v)}{g(u, v)} \varphi(u, v), \quad y = b + \frac{h(u, v)}{g(u, v)} \chi(u, v), \quad z = c + \frac{h(u, v)}{g(u, v)} \psi(u, v),$$

wo die rechten Seiten rationale Funktionen der Parameter sind. Aus allem diesen ergibt sich nun der folgende **Satz: Jede algebraische Raumkurve kann durch drei Gleichungen von der Form**

$$x = \Phi(u, v), \quad y = X(u, v), \quad z = \Psi(u, v), \quad . \quad . \quad (4)$$

dargestellt werden, wo Φ, X, Ψ, die Symbole rationaler Fnnktionen sind, und die Parameter u und v durch eine Gleichung

$$f(u, v) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

miteinander verknüpft sind, wo f ein ganzes Polynom in u, v ist.

Aus einer derartigen analytischen Darstellung lassen sich unzählige andere herleiten, indem man die u, v gleich zwei anderen beliebigen rationalen Funktionen zweier neuer Parameter setzt. Diese Willkür kann man vorteilhaft benutzen, um zu Formeln von möglichster Einfachheit zu gelangen.

Bemerkenswert ist der Fall, daß die Funktion $f(u, v)$ linear ist. Alsdann kann man sie benutzen um v zu eliminieren, und man erhält dann Gleichungen von der Form

$$x = \Phi(u), \quad y = X(u), \quad z = \Psi(u),$$

wo diese neuen Funktionen ebenfalls rational sind. In diesem Falle heißt die Kurve selbst rational, oder auch unikursal.

203. Aus dem dargelegten, wirklich fundamentalen Satze lassen sich viele wichtige Folgerungen ziehen. Eliminieren wir aus drei beliebigen

der Gleichungen (4) und (5) u und v, so erhalten wir vier Gleichungen von folgendem Typus

$$P(y, z) = 0, \qquad Q(z, x) = 0, \qquad R(x, y) = 0, \qquad F(x, y, z) = 0,$$

wo die $\Phi \ldots F$ ganze rationale Funktionen sind. Jede von diesen stellt eine durch die Kurve gehende Fläche dar; die drei ersten sind Zylinder, deren Erzeugende parallel den Koordinatachsen sind. **Im allgemeinen ist, um die Kurve vollständig zu individualisieren, es nötig, alle vier zu betrachten**; in besonderen Fällen können jedoch Identitäten bestehen von der Form

$$P \cdot P_1 + Q \cdot Q_1 + R \cdot R_1 + F_1 \cdot F \equiv 0,$$

wo $P_1 \ldots F_1$ neue rationale und ganze Funktionen sind, und dann erfordert die vollständige Darstellung der Kurve nur drei oder zwei Gleichungen von obigem Typus.

Zugleich mit der durch Gl. (4) und (5) dargestellten Kurve Γ betrachten wir eine beliebige Ebene ϵ, etwa die durch

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

dargestellte, und wollen ihre Schnittpunkte mit Γ bestimmen. Offenbar entsprechen diese jenen Werten von u, v, die den beiden Gleichungen

$$A \cdot \Phi(u, v) + B \cdot X(u, v) + C \cdot \Psi(u, v) + D = 0 \quad \text{und} \quad f(u, v) = 0$$

entsprechen. Nun ist dieses ein bestimmtes System algebraischer Gleichungen, hat also eine bestimmte, endliche, von dem Werte der Koeffizienten A, B, C, D unabhängige, Zahl von Lösungen. Dies zeigt uns: **Eine algebraische Raumkurve wird von allen Ebenen des Raumes in derselben endlichen Zahl von Punkten geschnitten.** Diese Zahl heißt die Ordnung der Kurve, und wir wollen sie, wie üblich, mit dem Buchstaben n bezeichnen. Insbesondere **hat eine Raumkurve n^{ter} Ordnung n unendlich ferne Punkte** (reelle und imaginäre zusammengenommen).

Es sei Γ' die Projektion der Kurve Γ auf eine beliebige Ebene π von einem beliebigen Zentrum C aus, dann wird Γ' eine ebene Kurve von gewisser Ordnung n' sein, wo n' also die Zahl der Punkte ist, in denen Γ' von einer beliebigen in π gelegenen Geraden g geschnitten wird. Da nun diese Punkte die Projektionen derjenigen Punkte sind, in denen Γ von der Ebene Cg geschnitten wird, so ist ihre Anzahl n, folglich $n' = n$. Dies läßt sich auch so ausdrücken, daß man sagt: **Die Projektion einer Raumkurve n^{ter} Ordnung von einem beliebigen Punkte des Raumes aus ist eine algebraische Kurve von derselben Ordnung n.** Diese Ordnung vermindert sich auf $n - d$, wenn die Raumkurve d mal durch das Projektionszentrum geht.

204. Die Sehne, die die beiden Punkte $P(u,v)$ und $Q(u+h, v+k)$ verbindet, hat die Gleichung

$$\frac{x - \Phi(u,v)}{\Phi(u+h,\, v+k) - \Phi(u,v)} = \frac{y - X(u,v)}{X(u+h,\, v+k) - X(u,v)} = \frac{z - \Psi(u,v)}{\Psi(u+h,\, v+k) - \Psi(u,v)},$$

wobei $f(u, v) = 0, \qquad f(u+h, v+k) = 0.$

Lassen wir hierin h und k gegen Null konvergieren, so bekommen wir die Gleichung der Tangente. Nun ist aber für ein unendlich kleines h und k

$$\Phi(u+h,\, v+k) - \Phi(u,v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u} h + \frac{\partial \varphi}{\partial v} k, \qquad \frac{\partial f}{\partial u} h + \frac{\partial f}{\partial v} k = 0,$$

und daher

$$\Phi(u+h,\, v+k) - \Phi(u,v) = h \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial v}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\} = \frac{h}{\frac{\partial f}{\partial v}} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix};$$

ähnliche Ausdrücke erhält man für ψ und χ, und daher entstehen für die Darstellung der Tangente im allgemeinen folgende Gleichungen:

$$\frac{x - \Phi(u,v)}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u} & \frac{\partial \Phi}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{y - X(u,v)}{\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{z - \Psi(u,v)}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial u} & \frac{\partial \Psi}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix}}, \qquad f(u,v) = 0. \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Stellen wir nun die Bedingung, daß diese Gerade eine beliebige Gerade des Raumes treffen soll (vgl. Nr. 193, Gl. (6)), so erhalten wir zwei algebraische Gleichungen in u und v, die eine ganz bestimmte Zahl von Lösungen haben, die unabhängig von der Wahl der Geraden ist. Dies beweist uns: **Jede Gerade des Raumes wird von einer bestimmten Zahl von Tangenten einer algebraischen Kurve getroffen.** Diese Zahl heißt der Rang der Kurve und wir wollen sie mit dem Buchstaben $\mathfrak{R}$ bezeichnen.

Es sei nun wieder Γ' die Projektion von Γ auf eine beliebige Ebene π von einem beliebigen Zentrum C aus. Ist dann ν' die Klasse von Γ', so gehen von jedem beliebigen Punkte O von π ν' Tangenten an Γ'. Jede dieser Tangenten ist offenbar die Projektion einer Tangente von Γ, und zwar einer solchen, die die Gerade CO trifft, und daher wird im allgemeinen $\nu' = \mathfrak{R}$ sein. Hieraus ergibt sich: **Die Projektion einer algebraischen Raumkurve ist eine algebraische ebene Kurve, deren Klasse gleich dem Range der ersteren ist.**

205. Die Gleichung der Schmiegungsebene im Punkte (u, v) der durch (4) und (5) dargestellten Kurve ergibt sich gemäß Gl. (7) in Nr. 192 als

$$\begin{vmatrix} x - \Phi(u,v) & y - X(u,v) & z - \Psi(u,v) \\ \frac{d}{du}\Phi(u,v) & \frac{d}{du}X(u,v) & \frac{d}{du}\Psi(u,v) \\ \frac{d^2}{du^2}\Phi(u,v) & \frac{d^2}{du^2}X(u,v) & \frac{d^2}{du^2}\Psi(u,v) \end{vmatrix} = 0,$$

wo die Ableitungen berechnet werden müssen unter Berücksichtigung des Umstandes, daß v die durch $f(u, v) = 0$ bestimmte Funktion von u ist. Setzen wir ganz allgemein

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \cdot \partial v} & \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \cdot \partial u} & \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = D(\omega, f),$$

so erhalten wir nach einer leichten Rechnung als Gleichung der Schmiegungsebene die folgende:

$$\begin{vmatrix} x - \Phi(u, v) & y - X(u, v) & z - \Psi(u, v) & 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial \Psi}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial \Psi}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ D(\varphi, f) & D(\psi, f) & D(\chi, f) & D(f, f) \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

welche Gleichung man sich immer mit $f(u, v) = 0$ verknüpft zu denken hat. Denkt man sich nun umgekehrt in (7) die x, y, z als gegeben, u und v als Unbekannte, so erhält man ein bestimmtes System von algebraischen Gleichungen, das eine endliche, von x, y, z unabhängige Zahl von Lösungen hat. Es ergibt sich hieraus, **daß von allen Punkten des Raumes eine bestimmte endliche Zahl von Schmiegungsebenen an eine Raumkurve gelegt werden können.** Diese Zahl entspricht wegen des Dualitätsgesetzes derjenigen, die wir als Ordnung bezeichnet haben; sie heißt daher die **Klasse der Kurve**, und wird gewöhnlich mit ν bezeichnet.

Ist wieder Γ' die Projektion von Γ von C aus auf π, so entsteht jeder Wendepunkt von Γ' durch eine durch C gehende Schmiegungsebene; also haben wir den Satz: **Die Projektion einer algebraischen Raumkurve ν^{ter} Klasse von einem beliebigen Zentrum aus ist eine ebene Kurve mit ν** (reellen oder imaginären) **Wendepunkten.**

Damit ist eine bemerkenswerte Abhängigkeit zwischen den charakteristischen Zahlen für eine Raumkurve und den entsprechenden für die ebenen Kurven aufgestellt, die sich sowohl für die Untersuchung der einen wie der anderen nützlich verwenden läßt. — Schließlich sei bemerkt: Die Projektion Γ' wird im allgemeinen keine Spitzen haben (s. Nr. 200, Schluß), jedoch wohl Doppelpunkte. Nun entstehen die letzteren (vgl. Nr. 198), durch die durch das Projektionszentrum laufenden Sehnen; hat dieses die Koordinaten a, b, c, so ist die Zahl d der Doppelpunkte gleich der Anzahl der Lösungen des folgenden bestimmten Systems von Gleichungen in u_1, v_1 und u_2, v_2

$$\frac{a - \Phi(u_1, v_1)}{\Phi(u_2, v_2) - \Phi(u_1, v_1)} = \frac{b - X(u_1, v_1)}{X(u_2, v_2) - X(u_1, v_1)} = \frac{c - \Psi(u_1, v_1)}{\Psi(u_2, v_2) - \Psi(u_1, v_1)}.$$
$$f(u_1, v_1) = 0, \qquad f(u_2, v_2) = 0.$$

§ 5. Graphische Darstellung der Raumkurven.

206. Mongesche Methode. Um eine Kurve Γ in doppelter Orthogonalprojektion darzustellen, pflegt man ihre beiden Projektionen Γ' und Γ'' zu geben, sowie das Korrespondenzgesetz, das zwischen den Punktepaaren besteht, die Projektionen desselben Kurvenpunktes sind. Im allgemeinen ergibt sich dieses Gesetz aus der Konstruktion der beiden Projektionen selbst, in anderen Fällen ist es aber unumgänglich, die Beziehung in irgend einer Weise genau anzugeben. Besteht sowohl Γ' als auch Γ'' aus einem einzigen, kontinuierlichen Kurvenzweige, so kann man, wenn ein Paar entsprechender Punkte A', A'' gegeben ist, alle übrigen bestimmen infolge der Kontinuität der Kurvenzweige. Bestehen hingegen Γ' sowohl wie Γ'' aus r Kurvenzweigen, so ist von jedem der zusammengehörenden Zweige ein Paar entsprechender Punkte anzugeben, damit man die übrigen Paare bestimmen könne.

Welcher Art nun auch das Gesetz der Korrespondenz sein mag, in jedem Doppelpunkte der Korrespondenz fallen die Projektionen desselben Kurvenpunktes zusammen, und daher **stellen diese die Schnitte der Kurve Γ mit der zweiten Halbierungsebene dar** (vgl. Nr. 6); von diesen Doppelpunkten sind einige, jedoch im allgemeinen nicht alle, solche, in denen Γ' und Γ'' sich schneiden.

Konstruiert man punktweise die Kurve Γ_1, die symmetrisch zu Γ'' in bezug auf die Achse ist, so sind auch Γ' und Γ_1 punktweise aufeinander bezogen, und die Doppelpunkte dieser Korrespondenz (es sind einige von ihnen, jedoch im allgemeinen nicht alle, die Schnittpunkte von Γ' und Γ_1) **geben die Schnittpunkte von Γ mit der ersten Halbierungsebene** (vgl. Nr. 12).

Um die Schnitte von Γ mit der Grundrißebene zu finden, beachte man, daß ihr Aufriß in die Achse fällt; ist daher T_1'' ein Schnitt von Γ'' mit a_{12}, so findet sich T_1' als ein i. a. ganz bestimmter der Schnitte der Ordinate von T_1'' mit Γ', nämlich demjenigen Punkte von Γ', der dem Punkte T_1'' von Γ'' nach dem angenommenen Korrespondenzgesetze entspricht. Ebenso findet man die Schnitte von Γ mit der Aufrißebene (vgl. Nr. 11).

In besonderen Fällen kann Γ eine ebene Kurve sein. Um zu erkennen, ob dies eingetreten ist, nehme man vier beliebige Punkte A', B', C', D' auf Γ' und suche die entsprechenden A'', B'', C'', D'' auf Γ''. Ist Γ nun eben, und nur dann, so sind die vier Punkte A, B, C, D in einer Ebene gelegen und die Geraden AB und CD werden sich schneiden; folglich werden die Punkte $(A'B', C'D')$ und

($A''B''$, $C''D''$) auf derselben Ordinate liegen. Wenn dieses für jedes beliebige Quadrupel von Punkten stattfindet, und nur dann, so ist Γ eine ebene Kurve.

Um eine Raumkurve (in ähnlicher Weise, wie es früher bei der Geraden geschah) zu bestimmen, braucht man manchmal nur die beiden Projektionen Γ' und Γ'' zu geben und zwar beliebig, indem man annimmt, daß zu jedem Punkte von Γ' einer von denjenigen gehört, in denen die entsprechende Ordinate die Γ'' schneidet. Um einen bestimmteren Fall zu haben, sei angenommen, daß Γ' und Γ'' allgemeine algebraische Kurven von der Ordnung n' und n'' seien, in keiner besonderen Lage in bezug auf die Projektionsebenen; dann entsprechen jedem Punkte von Γ' n'' Punkte von Γ'', d. h. daß jeder Punkt von Γ' die Projektion von n'' Punkten von Γ ist. Mit anderen Worten: Alle Erzeugenden des Zylinders, der Γ auf die Grundrißebene projiziert, sind n''-fache Sekanten von Γ. Ebenso sind alle Erzeugenden des auf die Aufrißebene projizierenden Zylinders n'-fache Sekanten. In solchem Falle entsprechen alle Punkte, in denen Γ' und Γ'' sich schneiden, den Schnittpunkten von Γ mit der zweiten Halbierungsebene. In besonderen Fällen erleiden diese Schlüsse leicht angebbare Modifikationen.

Es kann auch vorkommen, daß, wenn man beliebig einen Punkt P' auf Γ' angenommen hat, die entsprechende Ordinate die Γ'' nicht in reellen Punkten trifft. Das will sagen, daß P' einem Gebiete von Γ' entspricht, das obwohl reell, dennoch die Projektion eines imaginären Zweiges von Γ ist. Es geht daraus hervor, daß dann Γ' i. a. aus verschiedenen Teilen besteht, von denen einige Projektionen von zugehörigen reellen Zweigen, andere von imaginären Zweigen sind. Für die Anwendungen sind nur die ersteren brauchbar, die anderen können übergangen werden. Ähnliches gilt auch für den Aufriß Γ''.

Zur größeren Klarheit möge folgendes sehr einfache Beispiel betrachtet werden. Es sei Γ' eine zur Achse a_{12} parallele Gerade, Γ'' ein Kreis (Fig. 75), dann ist Γ der Kreis, in welchem die durch Γ' gelegte vertikale Ebene den geraden Zylinder mit der Basis Γ'' resp. die zu π_2 normalen Erzeugenden schneidet. Es sei nun $A''B''$ der zu a_{12} parallele Durchmesser von Γ'', und A', B' die Punkte, in denen Γ' von den Ordinaten der Punkte A'', B'' getroffen wird. Alsdann ist jeder Punkt von Γ'' offenbar die Projektion eines Punktes von Γ, während jeder von Γ' die von zwei Punkten von Γ ist. Jedoch nur die Punkte der Strecke $A'B'$ sind Projektionen reeller Punkte des Kreises Γ, und zwar jeder ist es für zwei derselben; man nimmt daher als Grundriß des Kreises für gewöhnlich nur die Strecke $A'B'$. (Man vergleiche auch die in Nr. 8 gemachte Bemerkung über Geraden, die zu den Projektionsebenen senkrecht stehen).

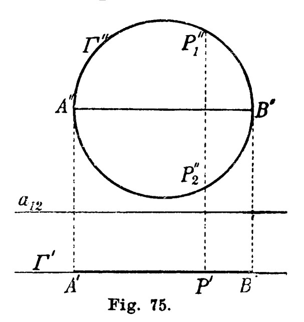


Fig. 75.

207. Methode der Zentralprojektion. Um hiernach eine Raumkurve Γ darzustellen, ist es notwendig und hinreichend, jeden ihrer

Punkte in der gewohnten Weise zu bestimmen $P \equiv (T_p I_p', P')$. Die unendlich vielen Hilfsgraden $p \equiv (T_p I_p')$ unterliegen hierbei einer großen Willkür, da jede nur die einzige Bedingung erfüllen muß, durch einen Punkt der Kurve zu gehen; um sie festzulegen, muß man den Ort T der Punkte T_p und den Ort I' der Punkte I_p' angeben, sowie das Gesetz, nach welchem die Punkte der beiden Kurven sich einander entsprechen, d. h. die Enveloppe der Geraden p. Zu diesen Daten muß natürlich noch die Projektion Γ', also der Ort der Punkte P' hinzukommen. Die unendlich fernen Punkte von Γ' sind dann die Projektionen der Schnitte von Γ mit der Verschwindungsebene, ihre Schnitte mit T die Spuren von $\mathsf{\Gamma}$, und ihre Schnitte mit Γ' die Projektionen der unendlich fernen Punkte derselben.

Die noch bestehende Freiheit in der Wahl von T und I' läßt sich auf zwei Arten, die sich wegen der Einfachheit der Zeichnung besonders empfehlen, einschränken:

a) Die Hilfsgeraden mögen alle den gemeinsamen Spurpunkt T haben. Dann wird die Raumkurve noch bestimmt durch die Kurven Γ' und I', die Örter der Punkte P' und I_p'. Zwischen diesen Punkten besteht nun eine eindeutige Korrespondenz derart, daß entsprechende Punkte mit T allineiert sind (s. Fig. 76). Liegt ein Punkt von Γ im Unendlichen, so fällt sein Bild sowohl auf Γ' als auch auf I', also ist dies einer der Schnitte von Γ' und I'; liegt dagegen ein Punkt von Γ in der Bildebene, so liegt auch die Gerade $TP' \equiv TP$ in derselben, und die Gerade CI' ist mit ihr parallel, also liegen die Fluchtpunkte der den Durchstoßpunkten von Γ mit der Bildebene entsprechenden Geraden im Unendlichen, es sind also die unendlich fernen von I'. Wenn wir daher diese Punkte von T aus auf Γ' projizieren, mit Berücksichtigung der zwischen Γ' und I' bestehenden Korrespondenz, so erhalten wir die Durchstoßpunkte von Γ mit der Bildebene.

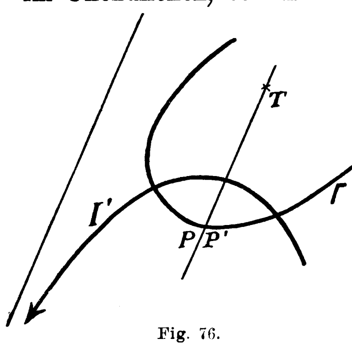


Fig. 76.

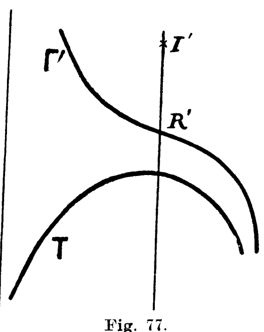


Fig. 77.

b) Es mögen alle Hilfsgeraden den gemeinsamen Fluchtpunkt I' haben; alsdann wird die Kurve Γ angesehen als auf einem Zylinder gelegen, dessen Erzeugende parallel zur Geraden CI' laufen (Fig. 77). Dann wird Γ bestimmt durch die Kurven T und Γ', die Örter der Punkte T und P'. Die Schnittpunkte dieser beiden Kurven sind offenbar die Schnitte von Γ mit der Bildebene. Um die unendlich fernen Punkte von Γ zu finden, beachten wir, daß man die Spur T_p, der zu einem

beliebigen Punkte P von Γ gehörenden Hilfsgeraden bekommt, wenn man durch P die Parallele zu CI' zieht und deren Schnitt mit der Bildebene bestimmt. Wenn nun P im Unendlichen liegt, so liegt auch jene Parallele im Unendlichen, dasselbe wird also auch für T_p eintreten. Dieser Punkt ist also einer der unendlich fernen von T. Projizieren wir diese Punkte von I' auf Γ', so erhalten wir das Bild R' der unendlich fernen Punkte von Γ.

Zur Übung: Das Kriterium aufzusuchen dafür, ob eine Kurve, die in Zentralprojektion dargestellt ist, eben sei oder nicht.

Methode der kotierten Ebenen. Nach dieser Methode wird eine Raumkurve dargestellt, indem man von jedem Punkte die Projektion P' auf die Grundebene gibt und die zugehörige Kote. Man erhält dann in der Grundebene eine Kurve Γ', die Orthogonalprojektion von Γ. Hat die Grundebene eine ganz beliebige Lage in bezug auf die Kurve, so wird jeder Punkt P nur eine Zahl für die Kote erhalten, und dann ist diese Darstellungsmethode besonders empfehlenswert. Nur die scheinbaren Doppelpunkte erhalten zwei Koten. In spezielleren Fällen kann es vorkommen, daß jeder Punkt mehrere Koten trägt; dann schneidet jeder projizierende Strahl die Kurve mehrmals. Ist $f(x, y) = 0$ die kartesische Gleichung von Γ und p die Kote von P, so wird $p = \varphi(x, y)$ eine gegebene Funktion; die beiden Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \qquad p = \varphi(x, y)$$

bestimmen dann die Kurve Γ; nur wenn $\varphi(x, y)$ eine lineare Funktion ist, ist Γ eben.

Zur Übung: Welche Beziehungen müssen bestehen, damit ein Punkt existiere, der zwei verschiedenen Raumkurven angehört, die nach einer der drei genannten Methoden dargestellt sind?

§ 6. Die Fundamentalaufgaben der darstellenden Geometrie für die Raumkurven.

208. Aufgabe I. In einem bestimmten Punkte einer Raumkurve die Tangente anzulegen.

Auflösung. Die Kurve sei nach der Mongeschen Methode dargestellt, und $P \equiv (P', P'')$ der gegebene Punkt. Die gesuchte Tangente t hat die Tangenten t' in P' an Γ' und t'' in P'' an Γ'' zu Projektionen; diese können nun konstruiert werden, wenn man die geometrischen Definition von Γ und demnach auch die von Γ' und Γ'' kennt, oder durch Zeichnung der Fehlerkurve erhalten werden, wenn die Kurven graphisch sind (vgl. Nr. 190). Um die Tangente t zu erhalten, kann man auch direkt einen zweiten Punkt derselben außer P aufsuchen; im allgemeinen kann als solcher einer der Spurpunkte in den Projektions- oder Halbierungsebenen dienen oder der Schnitt mit anderen bemerkenswerten Ebenen.

Ist Γ in Zentralprojektion dargestellt, und zwar nach der ersten der im vorigen angegebenen Methoden, so ist die Projektion von t im Punkte $P \equiv (T I_p', P')$ nichts anderes, als die Tangente in P' an Γ', und man ergänzt die Darstellungselemente von t, wenn man bedenkt, daß t in der Ebene liegt, die zur Fluchtgeraden die Tangente i_p' in I_p' an die Kurve l' hat, und als Spurlinie die durch T zu i_p' gezogene Gerade. In ähnlicher Weise ist zu verfahren, wenn die zweite Methode der Darstellung angewendet ist.

Ist schließlich Γ nach der Methode der kotierten Ebenen dargestellt, so ist die Darstellung der Tangente an Γ in P nichts anderes als die Tangente t' in P' an Γ'. Die Neigung läßt sich finden aus der analytischen Darstellung, von der im vorigen die Rede war, oder auch graphisch, indem man mit Hilfe der angegebenen Koten den die Kurve projizierenden Zylindermantel mitsamt der Kurve in eine Ebene abrollt, wodurch man eine graphische Kurve erhält, die das Wachstum der Koten veranschaulicht.

209. Aufgabe II. An eine Raumkurve in einem gegebenen Punkte die Schmiegungsebene zu legen.

Auflösung. Eine Gerade, die der gesuchten Ebene σ angehört, ist sofort gefunden: es ist die Tangente in dem betreffenden Punkte. Ist nun die Mongesche Methode angewandt, so genügt es, noch die Richtung der (horizontalen) Spurlinie von σ oder einen zweiten Punkt (der erste ist die Horizontalspur jener Tangente) anzugeben; diesen zweiten Punkt erhält man durch ein Verfahren, daß von Fall zu Fall je nach der Natur der betrachteten Kurve sich ergibt. Alsdann ist jene Spurlinie bestimmt, und die vertikale Spurlinie, da sie durch den zweiten Spurpunkt der Tangente, sowie durch den Schnitt der Grundlinie a_{12} mit der horizontalen Spurlinie gehen muß, ist infolge dessen bestimmt. — Sind die beiden Kurven Γ' und Γ'' vollständig gezeichnet, aber nicht analytisch oder geometrisch definiert, so kann man dennoch, wenn man das Gesetz der Korrespondenz zwischen entsprechenden Punkten kennt, die Schmiegungsebene auf folgende Weise finden: Man suche wiederum die Projektionen t', t'' und die Spurpunkte T_1, T_2 der Tangente t im Punkte P von Γ. Nun betrachte man den Zylinder, der die Γ in einer zu t parallelen Richtung auf die π_1 projiziert, dessen Erzeugende also zu t parallel sind. Um die Darstellung irgend einer solchen Erzeugenden e zu erhalten, nehme man irgend einen Punkt $A \equiv (A', A'')$ von Γ und ziehe durch A' und A'' die Geraden e' und e'' parallel zu t' und t''. Dann suche man die Horizontalspur E_1 der Geraden e. Der Ort der Punkte E_1 ist eine Kurve Δ_1, die — vgl. Nr. 200 — den Punkt T_1 als Spitze hat; die Spitzentangente ist die erste Spurlinie s_1 der gesuchten Schmiegungsebene σ, die zweite s_2 ist die Verbindungslinie des Punktes $(t_1 a_{12})$ mit T_2. An Stelle des ge-

nannten Zylinders kann man sich auch des Kegels bedienen, der Γ aus P projiziert; t ist eine Erzeugende desselben, und die entsprechende Berührungsebene die gesuchte Oskulationsebene.

Ähnlich kann man verfahren bei Anwendung der Zentralprojektion oder der kotierten Ebenen.

210. Aufgabe III. Die Schnitte einer Raumkurve mit einer gegebenen Ebene zu konstruieren.

α) Die Kurve sei durch ihre beiden Orthogonalprojektionen Γ', Γ'' gegeben, und die Ebene ϵ durch ihre beiden Spuren s_1, s_2. Würde ϵ senkrecht zur Grundebene sein, also s_2 senkrecht zur Grundlinie, so hätten die gesuchten Punkte als erste Projektion die Schnitte von Γ' mit s_1, womit die Aufgabe sogleich gelöst wäre. Nun läßt sich der allgemeine Fall auf diesen Fall durch eine Verlegung der Vertikalebene zurückführen. Wir nehmen als neue Grundlinie eine beliebige zu s_1 senkrechte Gerade $\bar{a}_{12}$, konstruieren $\bar{\Gamma}''$ und $\bar{s}_2$; damit finden wir $\bar{X}''$, $\bar{Y}''$, ... als Schnitte der beiden letzteren Linien, daraus ergeben sich X', Y' ... und dann X'', Y'' ..., die Projektionen der gesuchten Punkte. — Es sei bemerkt, daß der Grundgedanke dieser Lösung unverändert bleibt, wenn ϵ durch die Grundlinie a_{12} geht, also durch einen ihrer Punkte $K \equiv (K', K'')$ bestimmt wird, oder parallel zu ihr verläuft. In diesem Falle nimmt man als Hilfsebene die Seitenrißebene, konstruiert den Seitenriß Γ''' und die dritte Spurlinie s_3 von ϵ; die Schnittpunkte von t_3 und Γ''' sind die dritten Projektionen X''', Y''', ... der gesuchten Punkte; die durch sie zur Grundlinie gezogenen Parallelen liefern X'', Y'', und die durch sie gehenden Lote liefern X', Y' auf Γ'.

β) Ist Γ in Zentralprojektion dargestellt (vgl. Nr. 207), und ist ϵ nicht parallel zur Grundebene, also in der üblichen Weise bestimmt, so ist die Aufgabe zunächst sehr leicht zu lösen, wenn ϵ eine projizierende Ebene ist. In diesem Falle haben nämlich die gesuchten Punkte die Schnitte der Spur von ϵ mit Γ' zu Projektionen; diese Spur ist zugleich die Fluchtgerade von ϵ. Befindet sich die Ebene ϵ aber nicht in dieser Lage, so kann man durch Verlegung des Projektionszentrums sie in diese Verfassung bringen. Hierbei kann man (vgl. Nr. 84) den Hauptpunkt beibehalten, und hat dann als neues Zentrum den Punkt zu wählen, in welchem CC_0 von ϵ geschnitten wird. Hat man so die gesuchten Punkte in dem neuen System gefunden, so ist, wenn man zu dem alten zurückgekehrt ist, die Aufgabe erledigt[1]). — Die Untersuchung des Falles, daß ϵ parallel zur Grundebene, überlassen wir dem Leser.

1) Im Falle der Orthogonal- oder Zentralprojektion wird diese Aufgabe durch dieselben Kunstgriffe gelöst, wie bei den Polyedern in Nr. 171, daher kann der Leser sich die zugehörigen Figuren nach Anleitung der Fig. 36 u. 39 anfertigen.



γ) Wenn schließlich die Kurve durch die kotierte Projektion dargestellt ist, läßt sich die Aufgabe in folgender Weise lösen. Γ' kann aufgefaßt werden als die Projektion einer bestimmten Kurve Δ, die in der Ebene ϵ liegt. Um nun die Darstellung von Δ zu erhalten, betrachten wir einen beliebigen Punkt P' von Γ' als die Projektion eines Punktes P_e von ϵ, und bestimmen dessen Kote q (s. Nr. 96 II). Variieren wir P' auf Γ', so bekommen wir die vollständige Darstellung von Δ. Nun sind diejenigen Punkte von Δ auf Γ aufzusuchen, die dieselbe Kote haben, diese sind die gesuchten Schnittpunkte. Dies läßt sich nun graphisch auf folgende Weise ausführen (s. Fig. 78): Man errichte in sämtlichen Punkten von Γ', senkrecht zur Spurlinie t von ϵ, Strecken an Größe und Richtung gleich der Kote des Punktes. Die Endpunkte dieser Strecken bilden dann eine Kurve Γ^*, die nebenbei bemerkt als eine spezielle axonometrische Darstellung, die Kavalierperspektive, von Γ angesehen werden kann, und die zugleich im Verein mit Γ' ein anschauliches Bild des Verlaufes von Γ liefert. Alsdann errichte man mit Hilfe der Neigungsskala von ϵ in jedem Punkte von Γ' ebenfalls senkrecht zur Spurlinie eine Strecke gleich der Kote des darüberliegenden Punktes von ϵ. Die Endpunkte bilden eine neue Kurve Γ_e, die man auch als Kavalierperspektive der oben genannten Kurve Δ auffassen kann. Die Punkte X^*, Y^*... in denen die beiden Kurven Γ^* und Γ_e sich schneiden oder berühren, entsprechen den Punkten, in denen ϵ die Γ schneidet, berührt oder oskuliert. Aus ihnen findet man leicht X', Y'... usw.[1])

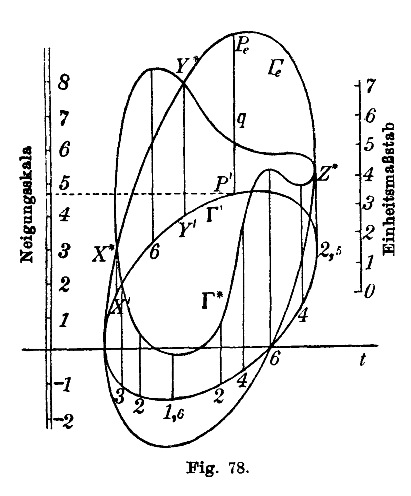


Fig. 78.

Zur Übung: Der Grundbegriff dieser Konstruktion kann auch bei Anwendung der Mongeschen Methode angewandt werden; wie?

211. Aufgabe IV. Von einem gegebenen Punkte aus an eine Raumkurve die Schmiegungsebenen zu legen.

Auflösung. Diese Aufgabe ist dual zu der vorigen. Um sie zu lösen, projiziere man die Kurve von dem gegebenen Punkte P aus auf die Grund- oder Aufrißebene, bzw. auf die Bildebene je nach der an-

1) Wird Γ wie in Nr. 207, Schluß, dargestellt, und hat ϵ die Gleichung $ax + by + c = z$, so kann die Aufgabe als Auflösung der Systeme

$$\left.\begin{array}{r} ax + by + c = \varphi(x, y) \\ f(x, y) = 0 \end{array}\right\}$$

betrachtet werden.

gewandten Darstellungsmethode. Die Spuren der gesuchten Ebenen sind dann (vgl. Nr. 200) die Wendetangenten der entstandenen Kurve Γ_1; sie bestimmen zugleich mit P die gesuchten Ebenen.

Aufgabe V. Die Tangenten einer Raumkurve aufzusuchen, die eine gegebene Gerade treffen.

Auflösung. Die Kurve sowohl wie die Gerade g seien z. B. durch die beiden Orthogonalprojektionen Γ', Γ'', bzw. g', g'' gegeben; S_1 und S_2 seien die Spurpunkte der letzteren. Wir projizieren Γ von einem beliebigen Punkt O der Geraden g (etwa dem unendlich fernen) auf der Grundrißebene π_1; dadurch entsteht eine Kurve Γ_1. Wir ziehen von T_1 an Γ_1 die Tangenten. Ist nun X_1 einer der Berührungspunkte, so ist X_1 die Projektion (vgl. Nr. 199) auf π_1 von O aus eines solchen Kurvenpunktes X, in welchem die Tangenten die Gerade g schneiden. Aus X_1 lassen sich dann leicht die Projektionen X', X'' des Punktes X' bestimmen.

Zur Übung: Welche Modifikationen treten in diese Konstruktion ein, wenn man eine andere Darstellungsmethode anwendet?

Drittes Kapitel.

Untersuchung einiger spezieller Raumkurven.

§ 1. Die Spirale des Pappus.

212. Der berühmte griechische Geometer Pappus von Alexandrien hat die Bemerkung gemacht, daß ebenso, wie man in der Ebene eine Spirale erzeugen kann, indem man auf einer Geraden, die sich gleichförmig um einen festen Punkt dreht, einen Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegen läßt (die Archimedische Spirale, s. S. 84), man in ähnlicher Weise auf einer Kugel eine Spirale erzeugen könne. Stellen wir uns nämlich eine Kugel vor mit dem Zentrum O und dem Radius R, sowie einen größten Kugelkreis, der sich gleichförmig um einen Durchmesser (die Achse der Figur) von einer bestimmten Anfangslage aus dreht, und lassen einen Punkt P die Peripherie dieses Kreises von dem Endpunkte A dieser Achse aus mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen, so entsteht durch diese doppelte Bewegung eine Raumkurve, die wir die Spirale des Pappus nennen wollen.[1]) Obendrein wollen wir noch annehmen, wie es auch der genannte Mathematiker tat, daß während der Kreis eine vollständige Umdrehung um seine Achse macht, der bewegliche Punkt erst einen Viertelkreis beschreibt.[2]).

1) Vgl. den Aufsatz des Verf. *La spirale de Pappus* im Arch. der Math. u. Phys., III. Reihe, Bd. XII, 1907.

2) Von dieser Annahme könnte man absehen, ohne daß die Grundeigenschaften der Kurve verloren gingen. Machen wir andere Voraussetzungen über die Bewegung des Punktes, so entsteht eine ganze Klasse von noch nicht untersuchten Kurven, die teils algebraisch, teils transzendent sind.

Um die Kurve analytisch darzustellen, nehmen wir zunächst ein Polarkoordinatensystem auf der Kugeloberfläche mit A als Pol. ϱ sei der Abstand des Punktes P von A, gemessen als Bogen auf dem größten Kugelkreise, ω der Winkel, den der Bogen AP mit der Anfangslage des beweglichen Kreises macht. Dann geben uns die Bedingungen der Bewegung sogleich die Beziehung

$$\omega = 4\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

als Gleichung der Spirale des Pappus in sphärischen Polarkoordinaten. Um die übliche Darstellung zu erhalten, nehmen wir ein dreirechtwinkliges kartesisches System, dessen z-Achse zum Durchmesser OA, dessen xz-Ebene zur Anfangslage des bewegten Kreises parallel ist. Sind nun a, b, c die Koordinaten des Kugelmittelpunktes O, so sind die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kugelfläche

$$x = a + R\sin\varrho\cdot\cos\omega, \quad y = b + R\sin\varrho\cdot\sin\omega, \quad z = c + R\cos\varrho.$$

Zufolge der Gleichung (1) ist daher die parametrische Darstellung der Pappusschen Spirale

$$x = a + R\sin\varrho\cdot\cos 4\varrho,\ y = b + R\sin\varrho\cdot\sin 4\varrho,\ z = c + R\cos\varrho \quad (2)$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} x = a + \frac{R}{2}(\sin 5\varrho - \sin 3\varrho), \quad y = b + \frac{R}{2}(\cos 3\varrho - \cos 5\varrho) \\ z = c + R\cos\varrho \end{array}\right\} \cdot \quad (3)$$

Ersetzen wir in diesen Gleichungen ϱ durch $\pi + \varrho$, so erhalten wir einen anderen Punkt der Kurve, dessen Koordinaten x', y', z' so beschaffen sind, daß

$$x' - a = -(x - a), \qquad y' - b = -(y - b), \qquad z' - c = -(z - c).$$

Diese beiden Punkte (x, y, z), (x', y', z') sind offenbar symmetrisch in bezug auf O, und daher ist dieser ein Symmetriezentrum oder Mittelpunkt der Kurve. Setzen wir in (3) $\operatorname{tg}\frac{\varrho}{2} = t$, so verwandeln sich diese Gleichungen in andere, die uns die Koordinaten x, y, z als ganze rationale Funktionen des Parameters t vom Grade $n \gtreqless 10$ liefern. Das beweist nun (vgl. Nr. 202, Schluß), daß, während die Archimedische Spirale transzendent ist, **die Spirale des Pappus eine rationale Kurve 10ter Ordnung ist.**

Im allgemeinen wollen wir ϱ als Parameter beibehalten, da bei Benutzung von t die Formeln komplizierter werden; wir werden also die Gl. (2) benutzen. Aus diesen ergibt sich

$$\frac{y-b}{x-a} = \operatorname{tg} 4\varrho, \qquad \overline{x-a}^2 + \overline{y-b}^2 = R^2\sin^2\varrho;$$

setzt man nun

$$\frac{y-b}{x-a} = \operatorname{tg}\varphi, \qquad \sqrt{\overline{x-a}^2 + \overline{y-b}^2} = u,$$

so wird

$$\varphi = 4\varrho, \qquad u = R \sin \varrho,$$

und daher

$$u = R \sin \frac{\varphi}{4} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Dies ist in Polarkoordinaten u, φ die Gleichung der Projektion unserer Spirale auf die xy-Ebene. In Berücksichtigung der Darlegungen in Nr. 188 X. schließen wir hieraus: **Die Orthogonalprojektion der Spirale des Pappus auf eine zur Achse senkrechte Grundrißebene ist eine Rhodonee 10ter Ordnung.**

Eine andere Kurve derselben Ordnung mit zwei Symmetrieachsen, die jedoch keiner bekannten Kategorie von Kurven angehört, erhält man, wenn man die Spirale des Pappus auf die xz-Ebene, also eine zur Anfangslage des bewegten Kreises parallele Ebene, oder auf die yz-Ebene, also eine parallel zur Achse und senkrecht zu jener Lage befindliche Ebene projiziert.

Projiziert man jedoch die Spirale zentral vom Punkte $O(a,b,c)$ aus auf die xy-Ebene, so erhält man eine Kurve, die durch die Gleichungen dargestellt wird:

$$\left.\begin{aligned} x &= a - \frac{c}{2}(\sin 5\varrho - \sin 3\varrho) : \cos \varrho \\ y &= b - \frac{c}{2}(\cos 3\varrho - \cos 5\varrho) : \cos \varrho \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Um diese zu interpretieren, beachten wir, daß aus ihnen folgt

$$\overline{x-a}^2 + \overline{y-b}^2 = \overline{c \cdot \operatorname{tg} \varrho}^2, \qquad \frac{y-b}{x-a} = \operatorname{tg} 4\varrho.$$

Wenn wir daher die vorigen Variabeln u und φ auch hier einführen, so bekommen wir

$$u = c \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Demnach **ist die Projektion der Spirale des Pappus vom Zentrum der Kugelfläche**, auf der sie gezeichnet ist, **auf eine zur Achse senkrechte Ebene eine Knotenkurve** (vgl. Nr. 188 XI).

Zwei Kurven einer analogen Art entstehen, wenn man die Spirale auf dieselbe Ebene von dem Punkte $A(a, b, c + R)$, oder dem diametral gegenüberliegenden Punkte $A_1(a, b, c - R)$ (also stereographisch) projiziert[1]). Um nämlich die erste dieser Kurven darzustellen, haben wir die Gleichungen

$$\frac{x-a}{\sin \varrho \cdot \cos 4\varrho} = \frac{y-b}{\sin \varrho \cdot \sin 4\varrho} = \frac{c+R}{R(1-\cos \varrho)}.$$

1) Bemerkung von Dr. E. Köstlin in einem Briefe an den Verf. vom 19. Oktober 1907.



Nun folgt aus diesen

$$\sqrt{\overline{x-a}^2+\overline{y-b}^2}=(c+R)\operatorname{ctg}\frac{\varrho}{2}, \qquad \frac{y-b}{x-a}=\operatorname{tg}4\varrho.$$

Führen wir die Polarkoordinaten u und φ wieder ein, so ergibt die erste

$$u=(c+R)\operatorname{ctg}\frac{\varrho}{2},$$

und da $\omega=4\varrho$, so folgt

$$u=(c+R)\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{8}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

welche Gleichung wiederum eine Knotenkurve darstellt. Ebenso bekommt man, bei der Projektion von A_1 aus

$$u=(c-R)\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{8}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

Um die allgemeine Gleichung der Tangente zu erhalten, bedienen wir uns der Gl. (5) in Nr. 193; dann bekommen wir

$$\frac{X-x}{\frac{1}{2}(5\cdot\cos 5\varrho-3\cdot\cos 3\varrho)}=\frac{Y-y}{\frac{1}{2}(5\cdot\sin 5\varrho-3\cdot\sin 3\varrho)}=\frac{Z-(c+R\cos\varrho)}{-\sin\varrho}, \quad (8)$$

wo X, Y, Z die laufenden Koordinaten sind, und x, y die durch Gl. (3) gegebenen Werte haben.

In ähnlicher Weise zeigt uns die Gl. (7) in Nr. 194, daß die Schmiegungsebene in einem Punkte der Spirale die Gleichung hat

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{R}{2}(5\cdot\cos 5\varrho-3\cdot\cos 3\varrho) & \frac{R}{2}(5\cdot\sin 5\varrho-3\cdot\sin 3\varrho) & -R\sin\varrho \\ \frac{R}{2}(-25\cdot\sin 5\varrho+9\cdot\sin 3\varrho) & \frac{R}{2}(25\cdot\cos 5\varrho-9\cdot\cos 3\varrho) & -R\cos\varrho \end{vmatrix}=0,$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}(X-x)(3\cdot\sin 2\varrho-12\cdot\sin 4\varrho+5\cdot\sin 6\varrho)+(Y-y)(-3\cos 2\varrho \\ \quad +12\cos 4\varrho-5\cos 6\varrho)+2(Z-z)(19-15\cdot\cos 2\varrho)=0\end{array}\right\}, \quad (9)$$

wo natürlich x, y, z die durch Gl. (3) bestimmten Werte haben.

213. Um die Spirale des Pappus bequem graphisch dazustellen, benutzt man am besten ein Mongesches System, das als Grund-, Auf- und Seitenrißebene drei Ebenen hat, die den vorhin für die analytische Darstellung verwendeten xy-, xz- und yz-Ebenen parallel sind. Sind zunächst die Punkte $O\equiv(O',O'')$ und $A\equiv(A',A'')$ gezeichnet (s. Fig. 79), so fällt O' mit A' und A_1' zusammen, und alle die reellen Punkte der Kugel projizieren sich im Aufriß in die Fläche des Kreises Γ_2 um O'' mit dem Radius $O''A''=R$, im Grundriß in den mit R um O' beschriebenen Kreis Γ_1. Es sei ferner $B\equiv(B', B'')$ die Lage, die der erzeugende Punkt erreicht, nachdem der bewegliche Kreis eine ganze

Umdrehung gemacht hat. Dann teilen wir den Quadranten $A''B''$ in eine bestimmte Anzahl n gleicher Teile, und den ganzen Kreis Γ_1 in ebensoviele Teile, gezählt in dem Sinne, in welchem der bewegliche Kreis rotiert. Es seien nun N und P' zwei entsprechende Punkte der beiden Teilungen, und P'' der Punkt, in dem $O''B''$ von der Ordinate des Punktes P' getroffen wird. Ziehen wir dann die Parallele $N\overline{N}$ zur Grundlinie a_{12}, so ist diese der Aufriß des kleinen Kugelkreises, der den Punkt M der Spirale enthält, der den Werten $\varrho = \overline{AN}$ und der Stellung AP des beweglichen Kreisquadranten entspricht. Dieser projiziert sich im Aufriß in den Quadranten der Ellipse, deren große Halbachse $O''A''$, deren kleine $O''P''$ ist, also ist M'' jener Punkt, in welchem dieser Ellipsenbogen von $N\overline{N}$ getroffen wird. Diese Ellipse und der Kreis $A''B''A_1''$ sind aber affine Figuren, in denen die Punkte M'' und N einander entsprechen, ebenso P'' und B''; $A''A_1''$ ist die Affinitätsachse. Ziehen wir daher die Gerade $B''N$, die die Achse in K trifft, so finden wir M'' als Schnitt der beiden Geraden KP'' und $N\overline{N}$. Die Ordinate von M'' schneidet dann den Radius $A'P'$ in M'. Führen

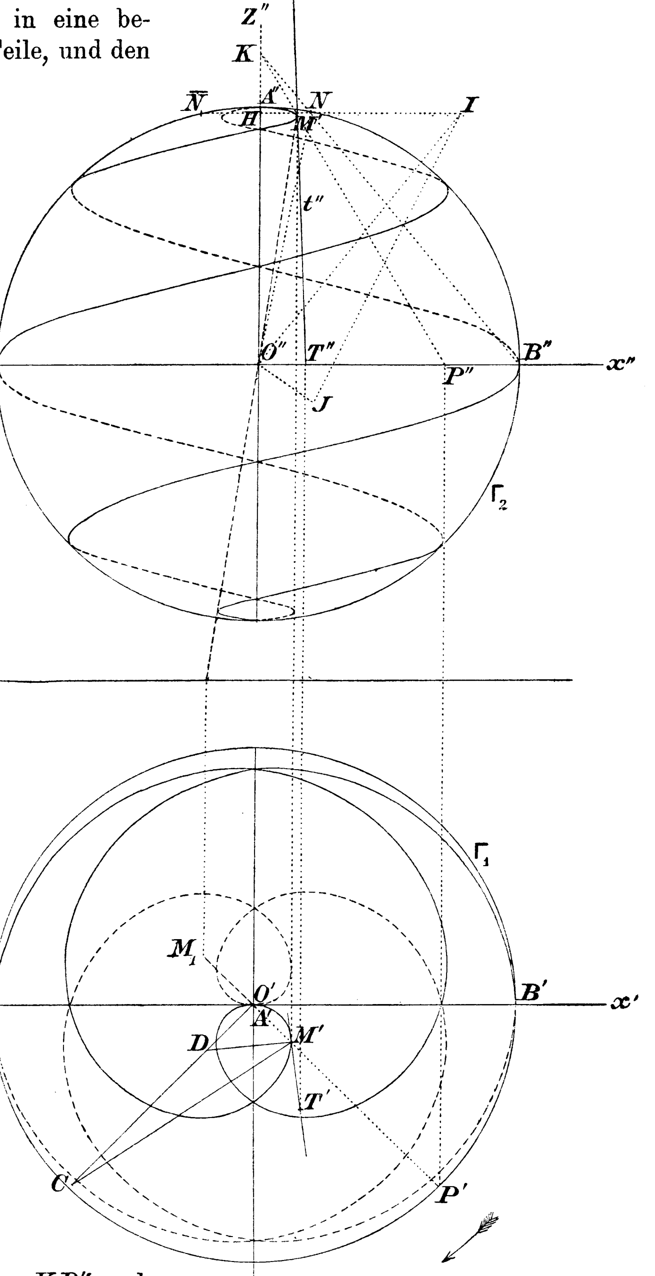


Fig. 79.

wir nun diese Konstruktion für alle Teilpunkte N aus, so bekommen wir n Punkte des Teiles der Spirale von A bis B; die ganze Spirale besteht aus vier solchen Teilen.

Ziehen wir jetzt die Gerade OM und bestimmen ihren Spurpunkt M_1 auf der Grundrißebene, so ist der Ort der Punkte M_1 die Projektion der Spirale vom Zentrum O aus auf die Horizontalebene, also die durch Gl. (6) dargestellte Knotenkurve. Wir erhalten dadurch eine bequeme Konstruktion dieser Linie. Betrachtet man M als auf der entsprechenden Erzeugenden des Zylinders, der die Spirale auf die Grundebene projiziert, gelegen, so ist M bestimmt durch seine Projektion M' und die Darstellungselemente dieser Erzeugenden, nämlich den Spurpunkt M' und den Fluchtpunkt O'.

214. Wir gehen jetzt dazu über, die Tangente in einem beliebigen Punkte M der Spirale zu konstruieren. Die erste Projektion dieser Tangente ist die Tangente an den Grundriß der Spirale, der die Gleichung (4) hat. Differenzieren wir diese, so erhalten wir

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{R}{4}\cos\frac{\varphi}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{R^2 - u^2}.$$

Aus dieser Beziehung ergibt sich: Machen wir den Winkel $M'O'C$ gleich $\frac{\pi}{2}$ und nehmen in dem als positiv gewählten Sinne auf dem Schenkel den Punkt C, so daß $\overline{M'C} = R$, und $O'D = \frac{1}{4}O'C$, so ist die Gerade DM' die Normale in M' an die Projektion Γ', und folglich ist die Tangente die in M' zu DM' errichtete Senkrechte t'.

Von der zweiten Projektion t'' der Tangente kennen wir schon einen Punkt M'', es genügt also, noch einen zweiten zu bestimmen; als solcher empfiehlt sich der Schnitt T der Tangente mit der durch O gehenden Horizontalebene. Um dessen Koordinaten zu finden, braucht man nur in den Gl. (8) $Z = c$ zu nehmen, dann ergibt sich

$$\overline{M'T'}^2 = \overline{X - x}^2 + \overline{Y - y}^2 = R^2 \operatorname{cotg}^2\varrho\,(\cos^2\varrho + 16\sin^2\varrho).$$

Um diesen Wert zeichnerisch zu erhalten, kann man folgendermaßen verfahren. Wir verlängern $\overline{N}N$ derart, daß, wenn H die Mitte von $\overline{N}N$ ist,

$$\overline{HI} = 4\cdot\overline{HN}.$$

Da nun

$$\overline{O''H} = R\cdot\cos\varrho, \qquad \overline{HI} = 4R\cdot\sin\varrho,$$

so wird

$$\overline{O''I} = R\sqrt{\cos^2\varrho + 16\sin^2\varrho}.$$

Nun konstruieren wir über $O''I$ als Kathete das rechtwinklige Dreieck $IO''J$, derart, daß der Winkel bei I gleich ϱ wird. Dann ist

$$\overline{O''J} = \overline{O''I}\cdot\operatorname{cotg}\varrho = R\operatorname{cotg}\varrho\sqrt{\cos^2\varrho + 16\sin^2\varrho} = \overline{M'T'}.$$

Nehmen wir daher auf der Tangente t' in positiver Richtung die Strecke $M'T' = O''J$, so wird die durch T' gezogene Ordinate, die durch O'' zur Grundlinie gezogene Parallele in T''' treffen, welcher Punkt mit M'' verbunden die gesuchte Gerade t'' liefert.

215. Wollen wir auch die Schmiegungsebene in einem Punkte M unserer Kurve konstruieren, so genügt dazu ein Punkt derselben, da sie ja im übrigen durch die Tangente t gehen muß. Als solchen Punkt wählen wir zweckmäßig den Schnitt S der Schmiegungsebene mit der Achse AA_1 der Kurve. Um dessen Koordinate Z zu erhalten, müssen wir in der Gleichung (9) $X = a$, $Y = b$ setzen; dann erhalten wir

$$Z - z = R \cdot \frac{\sin \varrho \cdot \sin 2\varrho}{19 - 15 \cos 2\varrho},$$

oder

$$Z - z = R \frac{2 \sin^2 \varrho \cdot \cos \varrho}{19(\cos^2 \varrho + \sin^2 \varrho) - 15(\cos^2 \varrho - \sin^2 \varrho)} = R \frac{\sin^2 \varrho \cdot \cos \varrho}{17 \sin^2 \varrho + 2 \cos^2 \varrho}.$$

Nun war aber

$$R \cdot \sin \varrho = u, \qquad R \cdot \cos \varrho = z - c,$$

folglich ist

$$Z - z = \frac{(z - c) u^2}{17 u^2 + 2(z - c)^2},$$

oder auch

$$\frac{1}{Z - z} = \frac{17}{z - c} + \frac{2(z - c)}{u^2}.$$

Hat man diesen Ausdruck konstruiert, so läßt sich S'' sogleich zeichnen; S' fällt mit O' zusammen, und die gesuchte Schmiegungsebene ist St.

§ 2. Die Zylinder-Schraubenlinie.

216. Man nennt Zylinder-Schraubenlinie oder kurzweg Schraubenlinie, die Raumkurve, die entsteht, wenn ein Punkt P eine Erzeugende g eines geraden Kreiszylinders mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchläuft, während g selber auch mit gleichförmiger Geschwindigkeit den Mantel dieses Zylinders durchläuft. — Es sei nun g_0 die Anfangslage der Erzeugenden, P_0 auf g_0 gelegen, die des bewegten Punktes. Wenn g einen vollständigen Umlauf vollbracht hat und also in seine Anfangslage zurückgekehrt ist, so wird P auf g_0 eine von P_0 verschiedene Lage P_1 eingenommen haben, der Bogen P_0P_1 heißt ein Schraubengang oder eine Windung, die Strecke P_0P_1 heißt die Höhe des Schraubenganges, oder kurz die Ganghöhe. Aus der Kontinuierlichkeit und Gleichförmigkeit der betrachteten Bewegung ergibt sich, daß die Schraubenlinie aus unzählig vielen einander kongruenten Windungen besteht und nach beiden Seiten von P_0 sich ins Unendliche erstreckt. Ein Beobachter, der sich in die Achse des Zylinders



stellt, derart, daß die Richtung Fuß-Kopf dieselbe ist, wie diejenige, in der sich P auf g bewegt, wird P sich von der Linken zur Rechten bewegen sehen oder umgekehrt; im ersteren Falle heißt die Schraubenlinie rechts gewunden, im anderen links gewunden.

Als Grundfläche des Zylinders, auf dem die Schraubenlinie verläuft, nehmen wir zweckmäßig den senkrecht zur Zylinderachse durch P_0 gehenden Schnittkreis und als Anfangspunkt eines kartesischen Systems den Mittelpunkt O dieses Kreises. Die Zylinderachse in dem Sinne genommen, wie P die g durchläuft, nehmen wir als z-Achse, die Gerade OP_0 in der Richtung $O \dots P_0$ als x-Achse, und den Strahl, der in der Richtung, wie die Erzeugende läuft, mit OP_0 einen rechten Winkel bildet, als positive y-Achse. Dieses Bezugssystem ist offenbar eindeutig bestimmt, wenn man die Schraubenlinie kennt. Sind nun x, y, z die Koordinaten irgend eines Kurvenpunktes P, P' die Projektion auf die xy-Ebene, und φ der Winkel P_0OP', gerechnet in der Richtung wie g rotiert, r der Zylinderradius, so haben wir zunächst

$$x = r \cdot \cos\varphi, \qquad y = r \cdot \sin\varphi. \quad \dots \dots \quad (1)$$

Nehmen wir als Anfang der Zeit t, den Augenblick, in welchem die Rotation in P_0 beginnt, so haben wir folgende Beziehungen

$$\varphi = \lambda t, \qquad z = \mu t,$$

folglich

$$\frac{\varphi}{z} = \frac{\lambda}{\mu},$$

wo λ und μ noch zu bestimmende Konstanten sind. Um sie zu finden, nehmen wir an, daß T die Zeit sei, die P braucht, um eine Windung zu durchlaufen, also von P_0 bis P_1, dann ist für $t = T$

$$\varphi = 2\pi \quad \text{und} \quad z = H,$$

wenn H die Ganghöhe bedeutet.

Daher ist

$$2\pi = \lambda T, \qquad H = \mu T,$$

und folglich

$$\frac{2\pi}{H} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Setzen wir die beiden Werte von $\frac{\lambda}{\mu}$ einander gleich, so bekommen wir

$$z = \frac{H}{2\pi}\varphi. \quad \dots \dots \dots \dots \quad (2)$$

Die Gleichungen (1) und (2) liefern uns die Koordinaten jedes beliebigen Punktes der Schraubenlinie als Funktionen des Parameters φ; sie bilden daher die parametrische Darstellung der Schraubenlinie. Setzen wir der Kürze halber $\frac{H}{2\pi} = h$, so verwandelt sich (2) in

$$z = h \cdot \varphi; \quad \dots \dots \dots \dots \quad (2')$$

h heißt die reduzierte Ganghöhe. Aus dieser parametrischen Darstellung folgt: **Die Schraubenlinie ist eine transzendente Kurve.** Ihre Gleichung ändert sich nicht, wenn man den Koordinatenanfang auf der Achse verschiebt, daher sind auch die einzelnen Windungen identisch; die Kurve hat überall dieselbe Gestalt und (Nr. 218) dieselbe Krümmung: **sie ist daher in sich selbst verschiebbar**, und, wie man beweisen kann, zugleich die einzige Raumkurve dieser Art[1]).

Eine Schraubenlinie ist durch die beiden Größen r und h bzw. durch zwei Punkte derselben Windung P_0, P_1 und die Zylinderfläche, sowie durch den Sinn, in welchem die Drehung der Erzeugenden vor sich geht, völlig bestimmt. Diese Daten ermöglichen nämlich das oben genannte Koordinatensystem zu bestimmen. Ist ferner P_1' die Projektion von P_1 auf die xy-Ebene, so ist z_1 die Ordinate von P_1 bestimmt, ebenso der Winkel $P_1' O P_0 = \varphi_1$, alsdann muß die Gl. (2), in welcher H noch unbekannt, befriedigt werden durch

$$\varphi = \varphi_1, \qquad z = z_1;$$

sie liefert also

$$H = \frac{2\pi z_1}{\varphi_1}$$

und somit ist die Schraubenlinie bestimmt. Ist der Sinn der Drehung unbestimmt geblieben, so bekommt man zwei Schraubenlinien, die den Angaben entsprechen. Liegen die Punkte P_0 und P_1 nicht auf derselben Windung, so ist die Zahl k der Windungen anzugeben, die der Punkt P noch zu durchlaufen hat, um von P_0 bis P_1 zu gelangen; auch dann gibt es, wenn der Drehungssinn nicht angegeben ist, zwei Schraubenlinien, die durch P_0 und P_1 gehen. — Aus der Gl. (2) folgt noch: Wenn man den Zylindermantel in eine Ebene abrollt, so verwandelt sich die Schraubenlinie in eine Gerade, die mit dem Grundkreise den Winkel $\varkappa$ bildet, derart daß $\operatorname{tg} \varkappa = \frac{H}{2r\pi} = \frac{h}{r}$. Den Winkel $\varkappa$ nennt man auch die Steigung der Schraubenlinie.

217. Ersetzen wir die beiden Koordinatachsen Ox, Oy durch irgendwelche andere zu einander senkrechte $O\xi$, $O\eta$, und bezeichnen den Winkel zwischen den Geraden Ox und $O\xi$ mit α, so lauten die Beziehungen, die zwischen den Koordinaten desselben Punktes in den beiden Systemen bestehen:

$$\xi = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha, \quad \eta = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha.$$

In bezug auf die neuen Achsen erhält die Schraubenlinie daher folgende parametrische Darstellung:

$$\xi = R \cdot \cos(\varphi + \alpha), \quad \eta = R \cdot \sin(\varphi + \alpha), \quad z = h\varphi.$$

1) In der Ebene sind nur die Gerade und der Kreis in sich verschiebbar.

Nun stellen aber die zweite und dritte von diesen Gleichungen die Projektion der Kurve auf die ηz-Ebene dar, die also eine beliebige durch die Zylinderachse gehende Ebene ist. Eliminieren wir aus jenen φ, so entsteht die Gleichung der Projektion, die also lautet

$$\frac{\eta}{r} = \sin\left(\frac{z}{h} + \alpha\right),$$

und daher ist jene (vgl. Nr. 189 I) eine Sinusoide. Also haben wir den

Satz von Pitot. Die Orthogonalprojektion der Schraubenlinie auf eine zur Zylinderachse parallele Ebene ist eine Sinusoide.

Im speziellen ist z. B. die Projektion auf die xz-Ebene $x = r \cdot \cos\frac{z}{h}$, die auf die yz-Ebene $y = r \cdot \sin\frac{z}{h}$.

Suchen wir jetzt die Zentral-Projektion der Kurve von einem beliebigen Punkte C der Achse auf die xy-Ebene. Ist c die Ordinate von C, so lauten die Gleichungen eines beliebigen projizierenden Strahles

$$\frac{x}{r \cdot \cos\varphi} = \frac{y}{r \cdot \sin\varphi} = \frac{z - c}{h\varphi - c}.$$

Machen wir hierin $z = 0$, so folgt

$$x = -r \cdot \cos\varphi \cdot \frac{c}{h\varphi - c}, \quad y = -r \cdot \sin\varphi \cdot \frac{c}{h\varphi - c};$$

hieraus ergibt sich

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi, \qquad \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{cr}{c - h\varphi}.$$

Führen wir nun Polarkoordinaten $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\omega = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ ein, so sehen wir, daß

$$\omega = \varphi, \quad \varrho = \frac{cr}{c - h\varphi}.$$

Demnach lautet die Polargleichung der Projektion

$$\varrho(c - h\omega) = cr,$$

oder auch

$$\varrho\left(\frac{c}{h} - \omega\right) = \frac{cr}{h}.$$

Setzen wir hierin $\frac{c}{h} - \omega = \theta$, was ja nur eine Verlegung der Polarachse mit Beibehaltung des Poles bedeutet, so können wir auch schreiben

$$\varrho \cdot \theta = \frac{cr}{h},$$

und diese Gleichung (s. Nr. 189 IV) drückt analytisch aus den folgenden **Satz von Th. Olivier. Die Zentral-Projektion einer Schraubenlinie von einem Punkte ihrer Achse auf eine zu dieser senkrechte Ebene ist eine hyperbolische Spirale.**

Schließlich wollen wir noch die Schraubenlinie auf die xy-Ebene parallel zu einer beliebigen Geraden, die mit den Koordinatachsen die

Winkel α, β, γ bildet, projizieren. Die allgemeine Gleichung der projizierenden Strahlen lautet:

$$\frac{x - r \cdot \cos\varphi}{\cos\alpha} = \frac{y - r \cdot \sin\varphi}{\cos\beta} = \frac{z - h\varphi}{\cos\gamma}.$$

Machen wir hierin $z = 0$, so bekommen wir folgende parametrische Darstellung der Projektion

$$x = r \cdot \cos\varphi - \frac{h \cdot \cos\alpha}{\cos\gamma} \cdot \varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi - \frac{h \cdot \cos\beta}{\cos\gamma} \cdot \varphi.$$

Vergleichen wir diese mit den in Nr. 189 VIII angegebenen Gleichungen, so erkennen wir, daß sie eine verlängerte, gemeine oder verkürzte Zykloide darstellen, jenachdem

$$\frac{h^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta)}{\cos^2\gamma} \gtreqless r^2,$$

oder, da $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ist,

$$\operatorname{tg}\gamma \gtreqless \frac{r}{h}.$$

Nun ist aber, wie wir sogleich sehen werden, $\frac{h}{r}$ der Tangens des Winkels θ, den die Tangente der Schraubenlinie mit der Achse bildet; daher kann man auch sagen: jenachdem $\gamma \gtreqless \theta$ ist, und so ergibt sich dann der folgende **Satz von Guillery.**[1]) **Die Projektion einer Schraubenlinie auf eine zur Achse senkrechte Ebene parallel zu einer Geraden ist eine verlängerte, gemeine oder verkürzte Zykloide, jenachdem die Neigung dieser Geraden gegen die Achse größer, gleich oder kleiner ist als der Winkel, den die Kurventangente mit der Achse bildet.**

Anmerkung. Projiziert man die Schraubenlinie von einem beliebigen Punkte des Raumes auf eine beliebige (oder zur Achse senkrechte) Ebene, so erhält man eine transzendente Kurve von allgemeinerer Art wie die hyperbolische Spirale und die Zykloide. Diese Kurven können leicht punktweise konstruiert werden, indem man die Spuren der Projektionsstrahlen bestimmt: aber sie bilden eine umfangreiche Klasse von Kurven, die bis heute eingehender noch nicht untersucht sind.

218. Wenden wir auf die Gl. (1) und (2) die betreffenden Formeln an, so erhalten wir als allgemeine Gleichung der Tangente t der Schraubenlinie

$$\frac{x - r \cdot \cos\varphi}{-r \cdot \sin\varphi} = \frac{y - r \cdot \sin\varphi}{r \cdot \cos\varphi} = \frac{z - h\varphi}{h}. \quad \ldots \quad (3)$$

---

1) Vgl. eine Mitteilung von Th. Olivier aus d. J. 1847 an die Societé philomatique; für den Fall der gemeinen Zykloide siehe Montucla, *Hist. des math.* Nouv. éd., T. II (Paris, 1799.) S. 78



Ist nun θ der Winkel, den die Tangente mit der z-Achse bildet, so haben wir

$$\cos\theta = \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}, \quad \sin\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{r}{h} \quad \cdot \quad \cdot \quad (4)$$

folglich ist θ konstant. **Die (Tangente der) Schraubenlinie bildet also immer denselben Winkel mit der Achse.** Dieser Winkel ist derselbe den die Tangenten an die Projektion der Kurve auf die xz-Ebene in den Durchschnittspunkten mit der Projektion der Achse bilden. Er ist ferner das Komplement des S. 131 als „Steigung" bezeichneten Winkels $\varkappa$.

Aus Gl. (4) folgt, wenn r und θ gegeben sind, so kennt man auch h und damit H, **also ist eine Schraubenlinie, die einem gegebenen Zylinder angehört, auch bestimmt, wenn man einen ihrer Punkte und die zugehörige Tangente kennt**; kennt man aber nur die Neigung der Tangente, so erhält man zwei Schraubenlinien.

Trägt man auf den Tangenten vom Berührungspunkte aus ein konstantes Stück $r \cdot \operatorname{tg}\alpha$ ab, so erhält man eine Kurve von der Gleichung

$$x = r \cdot \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\cos\alpha}, \quad y = r \cdot \frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\cos\alpha}, \quad z = h\varphi + h \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Setzt man nun

$$\frac{r}{\cos\alpha} = r_1 \quad \varphi + \alpha = \varphi_1,$$

so kann man diese auch schreiben als

$$x = r_1 \cos\varphi_1, \quad y = r_1 \sin\varphi_1, \quad z + h(\alpha - \operatorname{tg}\alpha) = h\varphi_1.$$

Also ist diese Kurve eine neue Schraubenlinie; durch Variation von α erhält man deren ∞^1, sie haben alle dieselbe Steigung.

Setzen wir in Gl. (3) $z = 0$, so erhalten wir für die Koordinaten x_1, y_1 des ersten Spurpunktes T_1 von t folgende Ausdrücke

$$x_1 = r \cdot \cos\varphi + r\varphi \cdot \sin\varphi, \quad y_1 = r \cdot \sin\varphi - r\varphi \cdot \cos\varphi. \quad . \quad (5)$$

Nimmt man φ variabel, so stellen diese (Nr. 189 VII) eine Kreisevolvente dar, **also ist die Schnittlinie der von den Tangenten einer Schraubenlinie gebildeten abwickelbaren Fläche mit einer zur Achse senkrechten Ebene eine Kreisevolvente.**

Für den Bogen s der Schraubenlinie gezählt vom Punkte P_0 bis zum Punkte P mit dem Parameter φ ergibt sich aus (1)

$$s = \varphi \cdot \sqrt{r^2+h^2}.$$ [1]

Nimmt man s als Parameter so wird (1) zu

$$x = r \cdot \cos\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}, \quad y = r \cdot \sin\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}, \quad z = \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}.$$

---

1) Die Länge einer ganzen Windung ist daher $2\pi\sqrt{r^2+h^2}$.

Auch aus dieser ergibt sich gemäß der Formel (9') auf S. 101, daß die Schraubenlinie überall dieselbe Krümmung hat, nämlich $\frac{r}{r^2+h^2}$.

219. Als Gleichung der Schmiegungsebene ergibt sich nach Nr. 194

$$\begin{vmatrix} x - r\cdot\cos\varphi & y - r\cdot\sin\varphi & z - h\varphi \\ -r\cdot\sin\varphi & r\cdot\cos\varphi & h \\ -r\cdot\cos\varphi & -r\cdot\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$x\cdot\sin\varphi - y\cdot\cos\varphi + \frac{r}{h}z = r\varphi. \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Setzen wir hierin $z = 0$, so ergibt sich die allgemeine Gleichung der Tangente an die vorhin genannte Kreisevolvente.

Bezeichnen wir den Winkel den die Schmiegungsebene mit der Achse Oz bildet mit ϑ, so zeigen uns die Gl. (6), daß

$$\cos\vartheta = \frac{\frac{r}{h}}{\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}} = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}.$$

Da dieser Ausdruck unabhängig von φ, also konstant ist, **so bilden die Schmiegungsebenen einer Schraubenlinie mit der Zylinderachse alle denselben Winkel.** Die Ebene (6) ist offenbar senkrecht zu der mit der Gleichung $x\cos\varphi + y\cdot\sin\varphi = r$, d. i. die durch denselben Punkt gehende und den Zylinder längs der zugehörigen Erzeugenden berührende Ebene.

Eine bemerkenswerte Eigenschaft unserer Kurve erhält man auf folgende Weise, indem man ihre Schnitte mit einer beliebigen Ebene des Raumes betrachtet, also mit

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Ist φ_0 der Parameter irgendeines dieser Punkte P_0, so ist

$$r(A\cdot\cos\varphi_0 + B\cdot\sin\varphi_0) + Ch\varphi_0 + D = 0, \quad \ldots \quad (a)$$

während die Gleichung der Schmiegungsebene in diesem Punkte ist

$$x\sin\varphi_0 - y\cos\varphi_0 - r\varphi_0 + \frac{r}{h}z = 0. \quad \ldots \quad (b)$$

Da nun φ_0 der Gl. (a) genügt, so wird (b) befriedigt sein, wenn man die x, y, z so wählt, daß

$$\frac{-y}{rA} = \frac{x}{rB} = \frac{-r}{Ch} = \frac{\frac{rz}{h}}{D},$$

oder

$$x = -\frac{r^2B}{Ch}, \quad y = \frac{r^2A}{Ch}, \quad z = -\frac{D}{C}.$$

Dies Resultat gibt in Worte gekleidet den folgenden

Satz von Reye: Die Schmiegungsebenen einer Schraubenlinie in den Punkten in denen sie von einer beliebigen Ebene geschnitten wird, laufen durch einen Punkt der letzteren.

In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß die hierzu duale Eigenschaft besteht, nämlich: **Die Berührungspunkte einer Schraubenlinie mit den Schmiegungsebenen, die durch denselben Punkt gehen, liegen in einer Ebene, die denselben Punkt enthält.**

220. Die bequemste Art, die Schraubenlinie graphisch darzustellen, erhält man bei Anwendung der Mongeschen Methode, indem man die Grundfläche des Zylinders als Grundrißebene nimmt und die Aufrißebene zum Radius OP_0 parallel. Dann projizieren sich alle Punkte des Zylindermantels, also auch der Schraubenlinie, in die Peripherie des mit OP_0 beschriebenen Kreises. P_0' fällt dann mit P_0 zusammen, P_0'' ist der Schnitt der zugehörigen Ordinate mit der Grundlinie. Die Punkte $P_1, P_2, P_3 \ldots P_{-1}, P_{-2} \ldots$, die auf der Erzeugenden g_0 liegen, projizieren sich im Grundriß auf P_0, im Aufriß fallen sie auf g_0' im Abstande $\pm H, 2H, 3H \ldots$ von P_0 (s. die Fig. 80). Die Erzeugenden des Zylinders, der die Schraubenlinie trägt, projizieren sich im Aufriß sämtlich als Senkrechte zur Grundlinie gelegen innerhalb des Streifens, der von den beiden zu ihnen parallelen Tangenten des Grundkreises begrenzt wird. — Um nun den Aufriß punktweise zu konstruieren, beachten wir zunächst, daß dieser eine Sinusoide ist (vgl. Nr. 217) und daß alle Windungen einander kongruent sind; demnach genügt es die erste Windung zu zeichnen. Zu dem Zwecke teilen wir den Grundkreis des Zylinders vom Punkte P_0, in der Richtung wie die Erzeugende laufen soll, in eine Anzahl n gleicher Teile, z. B. wie in der Figur geschehen, in 12 Teile; diese Teilpunkte sind dann als die Horizontalprojektionen ebensovieler Punkte der Schraubenlinie $A_1, A_2, A_3 \ldots A_{n-1}$ aufzufassen.

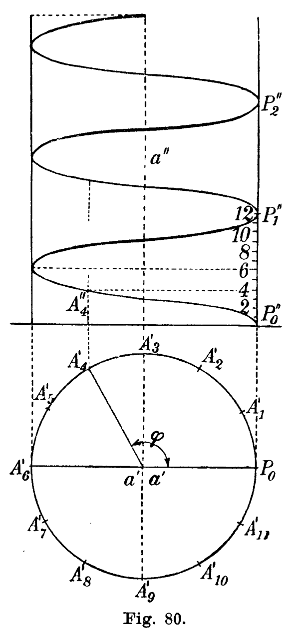


Fig. 80.

Um nun z. B. den Punkt A_k'' zu konstruieren, beachte man zuerst, daß er auf der durch A_k' gehenden Ordinate liegen muß. Seine horizontale Kote, die Ordinate z ergibt sich zufolge Gl. (2), da $\varphi = k \cdot \frac{2\pi}{n}$ ist, als $z = k\frac{H}{n}\cdot$ Wir haben daher die Strecke $P_0'' \; P_1''$ nur in n gleiche Teile zu teilen und durch den k^{ten} Teilpunkt eine Parallele

zur Grundlinie zu ziehen; sie schneidet die besagte Ordinate in A_k''. Auf solche Weise erhalten wir gleich $n-1$ Punkte außer P_0'' und P_1'' für den Aufriß, die wenn n hinreichend groß ist, zur Zeichnung genügen.

Um in einem beliebigen Punkte M der Schraubenlinie die Tangente t zu erhalten, beachten wir, daß zunächst t' die Tangente an den Kreis in M' ist. t'' muß durch M'' gehen, also brauchen wir nur noch einen Punkt der Tangente zu haben. Als solchen nehmen wir zweckmäßig den ersten Spurpunkt T_1 von t. Seine Koordinaten erhalten wir aus Gl. (5), indem nämlich die von M' sind $r \cos \varphi$, $r \sin \varphi$, bekommen wir

$$\overline{T_1 M'} = r\varphi;$$

$r\varphi$ ist aber die Bogenlänge $P_0 M'$ auf dem Grundkreise. Man hat also diesen Bogen zu rektifizieren (vgl. Nr. 177) und auf t' von M' aus in der Richtung $M' \,.\,.\, P_0$ eine Strecke gleich diesem Bogen abzutragen; der Endpunkt ist $T_1 \equiv T_1'$. Daraus erhält man sofort T_1'', das mit M'' verbunden t'' liefert. Damit ist die Tangente völlig bestimmt, und man kann leicht ihren zweiten Spurpunkt finden.

Um die Schmiegungsebene in M zu erhalten, erinnere man sich, daß sie durch t geht, und daß daher ihre Spurlinien t_1, t_2 durch T_1, T_2 gehen müssen. Außerdem zeigt uns Gl. (6), daß t_1 die Gleichung hat

$$x \cdot \sin \varphi - y \cdot \cos \varphi = r\varphi,$$

also ist t_1 parallel zu OM', d. i. senkrecht zu t'. Man hat demnach, um t_1 zu erhalten in T_1 auf t' die Senkrechte zu errichten. Verbindet man alsdann den Punkt $T_{12} \equiv t_1 a_{12}$ mit T_2, so erhält man die zweite Spur t_2 der gesuchten Ebene.

Anmerkung: Da t_1 Tangente an den Ort der Punkte T_1, das ist die Evolvente des Grundkreises ist, so ist man also auch imstande an diese Kurve die Tangente zu zeichnen.

221. Nachdem wir so die Darstellung der Punkte, Tangenten und Schmiegungsebenen kennen gelernt haben, können wir leicht weitere Aufgaben über die Schraubenlinie lösen. So können wir (vgl. Nr. 217) die Zykloide konstruieren, die ihren Schatten auf eine zur Achse senkrechte Ebene darstellt, wenn sie von einem unendlich fernen Punkte beleuchtet wird, oder die hyperbolische Spirale, die entsteht, wenn sie zentral von einem Punkte C der Achse auf eine ebensolche Ebene projiziert wird. Alsdann projiziert sich jeder Punkt M der Kurve in den Spurpunkt M_1 der Geraden CM, der auf dem Radius OM' des Basiskreises liegt, wenn M' die erste Orthogonalprojektion von M ist. Andere Projektionen lassen sich mit Hilfe des in Nr. 19 angegebenen Verfahrens finden. Wir wollen noch auf einige andere Aufgaben hinweisen.



I. Diejenigen Punkte einer Schraubenlinie zu bestimmen, in denen die Tangenten parallel zu einer gegebenen Ebene τ sind.

Alle Tangenten bilden mit der Achse denselben Winkel θ (s. Nr. 218); wenn man daher von einem Punkte V der Achse, der im Abstande c von O liegt, die Parallelen zu diesen Tangenten zieht, so bilden diese einen geraden Kegel, der als Grundfläche den Kreis K um O mit dem Radius $c \cdot \operatorname{tg} \theta$ hat. Wir legen nun durch V die Ebene ε parallel zu τ und suchen die Punkte, in denen ihre Spurlinie K schneidet. Ist Y einer dieser Punkte, so sind diejenigen Tangenten des Kreises Γ', der den Grundriß der Schraubenlinie bildet, die parallel zu OY laufen, die ersten Projektionen der gesuchten Tangenten. Zieht man daher durch O den zu OY senkrechten Durchmesser von Γ', so sind seine Endpunkte die ersten Projektionen der auf der ersten Windung gelegenen gesuchten Punkte; die zweiten ergeben sich leicht. Auf jeder Windung liegen zwei Punkte von der verlangten Eigenschaft.

II. Diejenigen Punkte einer Schraubenlinie zu bestimmen, in denen die Schmiegungsebenen parallel einer Geraden g sind.

Wir legen durch g die beiden Ebenen, die mit der Grundrißebene den Winkel $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ bilden, wo ϑ der in Nr. 219 bezeichnete Winkel ist. Ist $\sigma \equiv [s_1, s_2]$ eine von ihnen, so ist σ einer der gesuchten Schmiegungsebenen parallel. Nun sahen wir, daß die Spur t_1 einer Ebene, die unsere Kurve in dem Punkte M oskuliert, parallel zum Radius OM' ist. Ziehen wir also durch O die Parallele zu s_1, so schneidet sie die erste Projektion der Schraubenlinie in zwei Punkten, die beide als Grundriß der gesuchten, auf der ersten Windung gelegenen Punkte angesehen werden können. Natürlich liegen auf jeder Windung zwei ebensolche Punkte.

III. Die Schmiegungsebenen einer Schraubenlinie zu finden, die durch einen festen Punkt F gehen.

Alle Schmiegungsebenen bilden mit der Grundrißebene den konstanten Winkel $\frac{\pi}{2} - \vartheta$, demnach haben die durch F gehenden als Spuren Gerade, die den mit $c \cdot \operatorname{tg} \vartheta$ um F' beschriebenen Kreis K berühren, wo c die Horizontalkote von F ist. Anderseits umhüllen die Spuren der Schmiegungsebenen eine Kreisevolvente E, die wir in der vor. Nr. punkt- bzgl. tangentenweise zuzeichnen gelernt haben. Also sind die ersten Spuren der gesuchten Ebenen die gemeinsamen Tangenten von K und E. Die zweiten Spuren findet man mit Benutzung des Umstandes, daß die Ebenen durch F gehen müssen. — Zur Kontrolle benutze man den Satz von Reye (Nr. 219).

IV. Eine Schraubenlinie darzustellen, von der man die Achse $a \equiv (a', a'')$, einen Punkt $P_0 \equiv (P_0', P_0'')$, die Ganghöhe H und den Drehungssinn kennt.

Die Aufgabe ist leicht, wenn a senkrecht zu einer Projektionsebene oder parallel der Grundlinie ist. Im allgemeinen Falle fassen wir P_0 als Anfangspunkt der Schraubenlinie auf und legen durch ihn zunächst die zu a senkrechte Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$ (s. Nr. 31), die a in C treffen möge. Von der Ebene τ werden wir auch zweckmäßig die Affinitätsachse l mit Hilfe der Geraden CP_0 konstruieren. Nun legen wir die Ebene τ in die Grundrißebene um, und zeichnen (siehe die Fig. 81) die Umlegungen (P_0) und (C); der um (C) mit $(C)(P_0)$ beschriebene Kreis (K) ist dann die Umlegung des Grundkreises des Zylinders dem die Schraubenlinie aufgezeichnet ist. Wir teilen nun den Kreis (K) von (P_0) aus in eine beliebige Anzahl n gleicher Teile. Es sei (M_k) der k^{te} dieser Teilpunkte, so können wir hieraus M_k' sowie M_k'' ableiten mit Benutzung von l. $M_k \equiv (M_k', M_k'')$ wäre dann die Projektion eines Punktes M der Schraubenlinie auf die Ebene τ und wegen der charakteristischen Eigenschaft dieser Linie, ist dann $MM_k = k\frac{H}{n}$, folglich $M'M_k' = k\frac{H}{n}\cdot\cos\beta_1$, wenn β_1 die Neigung der Achse a gegen die Grundrißebene ist. Ziehen wir also durch M_k' die Parallele zu a', in der durch den gegebenen Drehungssinn bestimmten Richtung, und geben ihr diese Länge, so ist der Endpunkt M' die erste Projektion des Punktes M der Kurve. Die Ordinate von M' schneidet dann die durch M_k'' zu a'' gezogene Parallele in M''. Durch Variation von k (bzw. n) erhält man beliebig viele weitere Punkte in derselben Weise.

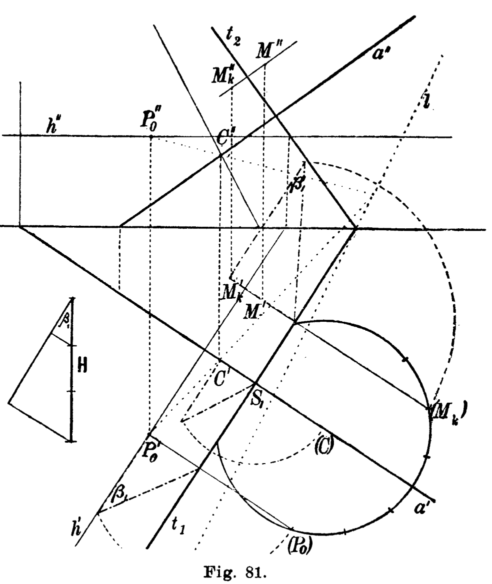


Fig. 81.

Drittes Buch.

Flächen.

Erstes Kapitel.

Allgemeines über die Flächen.

§ 1. Flächen als geometrische Örter von Punkten.

222. Lassen wir eine reelle Kurve sich im Raume bewegen, während sie selber sich nach einem bestimmten Gesetze deformiert, indem sie eine einfach unendliche Folge von Formen und Lagen annimmt, so ist der geometrische Ort der von ihr eingenommenen Lagen eine Fläche. Die bewegliche Kurve heißt die erzeugende Kurve oder ihre Erzeugende. Jene Kurve kann nun (s. Nr. 192) vermittels eines Parameters t in rechtwinkligen Koordinaten durch drei Gleichungen von folgendem Typus dargestellt werden:

$$x = \xi(t), \quad y = \eta(t), \quad z = \zeta(t).$$

Hierbei muß jedoch zugegeben werden, daß die Koeffizienten, die in diesen drei Funktionen auftreten, auch nicht mehr konstant sind, sondern wiederum Funktionen eines anderen Parameters u sind. Um dies auszudrücken, wollen wir schreiben

$$x = \xi(t, u), \quad y = \eta(t, u), \quad z = \zeta(t, u). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Jedem Werte von u entspricht dann eine der erzeugenden Kurven, und jedem Werte von t ein Punkt derselben, d. i. ein Punkt der Fläche. Man kann jedoch in Gl. (1) auch t festhalten, und u als veränderlich ansehen; alsdann stellt bei jedem Werte von t die Gl. (2) eine Kurve dar, die der gegebenen Fläche angehört; variieren wir t, so entsteht eine zweite Reihe von ∞^1 Kurven, die der Fläche angehören, und als die Glieder eines zweiten Systems von Erzeugenden, derselben Oberfläche angesehen werden können. Die Fläche ist also von einem doppelten System von Kurven überzogen; zwei beliebige Kurven der beiden verschiedenen Systeme schneiden sich in einem Punkte der Fläche, während umgekehrt durch jeden Punkt der Fläche (im allgemeinen) eine Erzeugende von jedem System hindurchgeht.[1])

Wir wollen mit Kurve (u) diejenige Erzeugende des ersten Systems bezeichnen, die dem Werte u des Parameters entspricht, mit Kurve (t)

---

1) Die geographischen Karten bieten, mit ihren Parallelen und Meridianen, ein übliches Beispiel solcher Betrachtung.

jene des zweiten, die dem Werte t entspricht, und mit Punkt (t, u) jenen Punkt der Fläche, dem die beiden Parameter t und u zukommen. Jede analytische Darstellung vom Typus (1) wollen wir als parametrische Darstellung der Fläche bezeichnen. Aus einer solchen Darstellung lassen sich unendlich viele ableiten, indem man t, u gleich beliebigen, aber von einander unabhängigen Funktionen von zwei neuen Parametern setzt. Jeder solchen Darstellung entspricht eine Erzeugungsart der Fläche durch die mit einer Deformation verbundene Bewegung einer Kurve.

Stellen wir zwischen den Variabeln t, u eine beliebige Beziehung her, etwa $\omega(t,u) = 0$, oder nehmen sie als Funktionen einer dritten unabhängigen Variablen s, etwa $t = \varphi(s), u = \chi(s)$, so scheiden wir aus der Gesamtheit der ∞^2 Punkte der Oberfläche, eine Folge von ∞^1 Punkten aus; wir erhalten so zwei analytische Darstellungen irgendeiner Kurve auf der Fläche, die eine Verallgemeinerung derjenigen sind, die wir früher (Nr. 177) für eine ebene Kurve angewendet haben.

Durch Elimination von t und u aus den Gl. (1) entsteht eine Gleichung von der Form

$$f(x, y, z) = 0. \qquad (2)$$

Sie heißt die Gleichung der Fläche und kann ebensowohl wie Gl. (1) zur Untersuchung der geometrischen Gebilde dienen, mit denen wir uns hier beschäftigen.

Umgekehrt: ist die Gl. (2) gegeben, so kann man aus ihr auf unzählig viele Weisen eine parametrische Darstellung der Fläche herleiten; zu diesem Zwecke kann man beispielsweise auf folgende Art verfahren: Wir lösen Gl. (2) nach z auf und setzen also

$$z = F(x, y);$$

alsdann läßt sich die Fläche darstellen durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(t, u), \quad y = \chi(t, u), \quad z = F[\varphi(t, u),\ \chi(t, u)];$$

wo φ und χ beliebige, von einander unabhängige Funktionen für die Parameter t, u sind.

In dem besonderen Falle, daß die Funktion $f(x, y, z)$ in das Produkt der r Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_r$ zerfällt, stellt die Gl. (2) die Gesamtheit von den r Flächen $f_i(x, y, z) = 0$ $(i = 1, 2, 3 \ldots r)$ dar, und man sagt, die Fläche sei zusammengesetzt, im anderen Falle heißt die Fläche einfach, und das ist der Fall, den wir als normal ansehen wollen.

Sind, umgekehrt, die Funktionen ξ, η, ζ oder die Funktion F gegeben, so wird i. a. durch die Gleichungen (1) oder (2) eine Fläche bestimmt. Die Funktionen ξ, η, ζ, f wollen wir dahin einschränken, daß mindestens eine keine Konstante sei, und daß ihre Koeffizienten reelle Zahlen seien; man nennt dann die Fläche reell; dies schließt jedoch



nicht ein, daß die betrachteten Flächen auch reelle Punkte haben.[1]) Ferner sei angenommen, daß die Funktionen i. a. kontinuierlich seien und Ableitungen der betrachteten Ordnung für alle Werte der in sie eingehenden Variabeln besitzen.

Zwei Gleichungen vom Typus (2), wie

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0$$

stellen zugleich betrachtet den Schnitt der beiden dargestellten Flächen dar, also die beiden Flächen gemeinsame Kurve. Diese wird reell genannt, wenn die betrachteten Flächen beide reell sind, dennoch ist es möglich, daß sie keinen reellen Punkt hat.

Zur Übung: Sind in Gl. (2) die Koeffizienten komplexe Zahlen, so enthält die Fläche dennoch im allgemeinen eine reelle Kurve.

223. Ist eine Fläche $\mathfrak{F}$ durch eine Gleichung vom Typus (2) gegeben, so können wir die Betrachtungen, die wir bei den in ähnlicher Weise dargestellten ebenen Kurven gemacht haben (vgl. Nr. 178), in geeigneter Weise verallgemeinert auch hier wiederholen, wie wir sogleich dartun wollen.

Es sei $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ein beliebiger fester Punkt im Raume. Durch ihn ziehen wir eine beliebige Gerade g, die mit den Koordinatachsen die Winkel α, β, γ bildet; alsdann besteht die Beziehung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und die Gerade g wird dann dargestellt durch die Gleichungen

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Infolgedessen lassen sich die Koordinaten eines beliebigen Punktes P von g darstellen in der Form

$$x = x_0 + \varrho\cos\alpha, \quad y = y_0 + \varrho\cos\beta, \quad z = z_0 + z\cos\gamma, \quad . \quad (5)$$

wo ϱ den Abstand der Punkte P und P_0 bedeutet. Die Schnittpunkte $P_1, P_2 \ldots$ von g mit $\mathfrak{F}$ entsprechen dann denjenigen Werten von ϱ, die der Gleichung genügen

$$f(x_0 + \varrho\cos\alpha, \quad y_0 + \varrho\cos\beta, \quad z_0 + \varrho\cos\gamma) = 0,$$

oder, wenn wir nach wachsenden Potenzen von ϱ ordnen,

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0, z_0) &+ \varrho\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos\beta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \cos\gamma\right\} \\ &+ \frac{\varrho^2}{2!}\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \cos^2\alpha + \cdots + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\right)_0 \cos\beta\cos\gamma + \cdots\right\} \quad . \quad (6) \\ &+ \frac{\varrho^3}{3!}\{\cdots\} + \cdots = 0. \end{aligned}$$

---

1) Als Beispiel diene $x^2 + y^2 + z^2 + r^2 = 0$.

Nehmen wir nun an, daß P_0 der Fläche angehöre, so wird einer der Abstände $P_0 P_1$, $P_0 P_2$ ... gleich Null werden; alsdann hat die Gl. (6) eine Wurzel $\varrho = 0$; in der Tat fehlt dann in (6) das bekannte Glied, da ja in diesem Falle $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ wird. Von dieser Wurzel 0 befreit lautet dann die Gleichung:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos\beta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \cos\gamma \\ &+ \frac{\varrho}{2!}\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \cos^2\alpha + \cdots + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\right)_0 \cos\beta\cos\gamma + \cdots\right\} \\ &+ \frac{\varrho^2}{3!}\{\cdots\} + \cdots = 0.\end{aligned} \quad . \quad (6')$$

Wählen wir jetzt die Gerade g, die bisher beliebig durch P_0 gezogen war, in geeigneter Weise, so können wir bewirken, daß noch ein zweiter der Schnittpunkte von g mit $\mathfrak{F}$ mit P_0 zusammenfällt, d. h. daß (6) nicht nur eine, sondern zwei Wurzeln $\varrho = 0$ habe; hierzu genügt es, die Winkel α, β, γ so zu wählen, daß

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos\beta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \cos\gamma = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Erinnern wir uns nun, daß von den Winkeln α, β, γ nur zwei voneinander unabhängig sind (s. Gl. (3)) und daß, wenn die drei Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ nicht alle im Punkte P_0 zugleich Null sind (d. h. wenn P_0 ein gewöhnlicher Punkt der Fläche $f(x, y, z) = 0$ ist), nun eine Beziehung (7) zwischen ihnen besteht, wodurch sich jene Bedingung auf eine einzige reduziert, so erkennen wir, **daß man durch einen gewöhnlichen Punkt einer Fläche unzählig viele Geraden ziehen kann, die sie in zwei mit jenem zusammenfallenden Punkten schneiden.**

Diese Geraden heißen die Tangenten an die Fläche im Punkte P_0. Um die Gleichung des geometrischen Ortes dieser Tangenten zu finden, beachten wir, daß wenn (x, y, z) ein beliebiger Punkt derselben ist, die Gl. (4) bestehen müssen, und daher wird (7) zu

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0. \quad . \quad (8)$$

Betrachten wir nun hierin x, y, z als laufende Koordinaten, so stellt diese Gleichung jenen Ort dar; da sie nun vom ersten Grade, und im allgemeinen bestimmt ist, so stellt sie eine Ebene dar, die die Berührungs- oder Tangential-Ebene der Fläche genannt wird. Damit ist also gezeigt: **Für jeden Punkt P_0 der durch $f(x, y, z) = 0$ dargestellten Fläche $\mathfrak{F}$, für den die ersten drei Ableitungen existieren, und nicht alle gleich Null sind, liegen alle dort berührenden Geraden in einer Ebene.** Diese Ebene ist auch der Ort der einfach unendlich vielen Geraden, die die durch P_0 gehenden auf der Fläche gezeichneten Kurven in diesem Punkte berühren, und daher: **Ist eine**

Kurve der Schnitt zweier Flächen, so ist die Tangente in einem beliebigen ihrer Punkte P die Schnittlinie der beiden Tangentialebenen an jene beiden Flächen in P.

224. Aus dem Obigen ergibt sich: Um die Ebene τ_0 zu konstruieren, die eine Fläche $\mathfrak{F}$ in einem Punkte P_0 berührt, genügt es, zwei beliebige durch P_0 gehende und auf $\mathfrak{F}$ liegende Kurven Γ und Δ zu betrachten, und an diese beiden in P_0 die Tangenten zu ziehen; diese bestimmen dann τ_0. Als solche Kurven kann man zweckmäßig zwei ebene Schnitte von $\mathfrak{F}$ nehmen, oder wenn man die parametrische Darstellung kennt, als Γ die durch P_0 gehende Kurve (t) und als Δ die entsprechende Kurve (u). Diese Wahl führt leicht dann zur Gleichung der Berührungsebene an eine durch Gl. (1) dargestellte Fläche, wie wir jetzt zeigen wollen.

Es seien t_0, u_0 die Parameterwerte von t und u die zum Punkte P_0, in dem man die Berührungsebene legen will, gehören. Da die Gleichung der Kurve (u_0) lautet

$$x = \xi(t, u_0), \quad y = \eta(t, u_0), \quad z = \zeta(t, u_0),$$

so muß die Tangente an sie im Punkte P_0 folgende Gleichung haben (s. Nr. 193)

$$\frac{x - \xi(t_0, u_0)}{\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_0} = \frac{y - \eta(t_0, u_0)}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_0} = \frac{z - \zeta(t_0, u_0)}{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_0}.$$

Ähnlich hat die Tangente in P_0 an die Kurve (t_0) die Gleichung

$$\frac{x - \xi(t_0, u_0)}{\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)_0} = \frac{y - \eta(t_0, u_0)}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\right)_0} = \frac{z - \zeta(t_0, u_0)}{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right)_0}.$$

Nun liegen aber diese beiden Geraden in der durch folgende Gleichung dargestellten Ebene:

$$\begin{vmatrix} x - \xi(t_0, u_0) & y - \eta(t_0, u_0) & z - \zeta(t_0, u_0) \\ \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_0 & \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_0 & \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)_0 & \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\right)_0 & \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right)_0 \end{vmatrix} = 0. \quad . \quad (9)$$

Diese Gleichung ist im allgemeinen bestimmt, und daher ist sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkte $P_0(u_0, t_0)$ an die Fläche (1).

225. Wir wollen jetzt untersuchen, ob eine durch den Punkt P_0 der Fläche gelegte Gerade g die Fläche in drei mit P_0 zusammenfallenden Punkten treffen kann. Damit dies eintrete, muß g zunächst in der Berührungsebene liegen, und ferner müssen die Richtungskosinus von g folgender Gleichung genügen:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \cos^2\alpha + \cdots + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\right)_0 \cos\beta \cdot \cos\gamma + \cdots = 0.$$

Sie muß also, außer daß sie der durch (8) dargestellten Ebene angehört, noch auf dem Kegel zweiter Ordnung liegen, der folgende Gleichung hat

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \cdots + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)_0 (y - y_0)(z - z_0) + \cdots = 0. \quad \textbf{(10)}$$

Da P_0 der Scheitelpunkt dieses Kegels ist, so folgt hieraus: **Unter den Geraden, die eine Fläche in einem gewöhnlichen Punkte P_0 berühren, gibt es im allgemeinen zwei, die die Fläche in drei mit P_0 zusammenfallenden Punkten treffen.** Man nennt dieselben die Haupttangenten der Fläche in jenem Punkte. Jenachdem sie reell und verschieden, zusammenfallend, oder konjugiert imaginär sind, heißt der Punkt ein hyperbolischer, parabolischer oder elliptischer. Im allgemeinen enthält eine Fläche ein Gebiet hyperbolischer und eins elliptischer Punkte, die durch eine Folge parabolischer Punkte geschieden sind, die sogenannte parabolische Kurve der Fläche. Der Punkt (x_0, y_0, z_0) ist hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch, jenachdem die Ebene (8) den Kegel (10) in zwei reellen getrennten, zwei zusammenfallenden, oder konjugiert imaginären Geraden schneidet, oder, wie eine kurze Rechnung beweist, jenachdem $\varDelta \gtreqless 0$, indem man setzt

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)_0 & \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)_0 & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 & \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 & 0 \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad \textbf{(11)}$$

Die parabolische Kurve einer Fläche wird daher durch das System der beiden Gleichungen dargestellt, die man erhält, wenn man sowohl die Determinante $\varDelta$ als auch die Funktion $f(x_0, y_0, z_0)$ gleich Null setzt. Vergleicht man diese beiden Gleichungen mit den Gl. (6) in Nr. 178, so erhellt daraus die Analogie der parabolischen Punkte einer Fläche mit den Wendepunkten einer ebenen Kurve.

Um festzustellen, wie sich die Fläche (2) in der Umgebung eines ihrer Punkte $P_0(x_0, y_0, z_0)$ verhält, lösen wir ihre Gleichung nach einer der Koordinaten auf und erhalten so z. B.

$$z = F(x, y);$$

alsdann wird die Gleichung der Berührungsebene im Punkte P_0

$$(x - x_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + (y - y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 - (z - z_0) = 0, \quad . \quad . \quad (8')$$



während

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11')$$

wird. Es sei nun $P(x_0 + h,\ y_0 + k,\ z_0 + l)$ ein dem P_0 unendlich nahe liegender Punkt der Fläche, also h, k, l unendlich kleine Größen, die durch die Beziehung $z_0 + l = F(x_0 + h,\ y_0 + k)$ miteinander verknüpft sind, oder da ja $z_0 = F(x_0, y_0)$, so ist

$$l = h\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + k\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 + \frac{1}{2!}\left(h^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 + 2hk\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}\right)_0 + k^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0\right) + \frac{1}{3!}(\cdots)\cdots$$

Der Abstand jenes Punktes P von der Berührungsebene in P_0 wird dann ausgedrückt durch

$$\delta = \frac{\frac{1}{2!}\left(h^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 + 2hk\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_0 + k^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0\right) + \cdots}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^2 + 1}}.$$

Da nun h, k unendlich kleine Größen sind, so hängt das Vorzeichen von δ ab von dem des Trinoms

$$h^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 + 2hk\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_0 + k^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0,$$

und es ist bekannt, daß, wenn $\varDelta > 0$, dieses ein mit den Werten und Vorzeichen von h und k veränderliches Vorzeichen hat, während, wenn $\varDelta < 0$, dieses Vorzeichen konstant ist. Dies zeigt uns, daß es im ersten Falle Punkte auf der einen und der anderen Seite der Berührungsebene τ_0 gibt, während im anderen Falle alle benachbarten Punkte auf derselben Seite von τ_0 liegen. Folglich: **In der Nähe eines elliptischen Punktes liegt eine Fläche ganz auf derselben Seite der zugehörigen Berührungsebene, während sie in der Nähe eines hyperbolischen teils auf der einen, teils auf der anderen Seite jener Ebene liegt.**

Die obigen Betrachtungen führen auch zu einer Bestimmung der parabolischen Kurve einer Fläche, deren parametrische Darstellung man kennt. Ist nämlich δ wieder der Abstand des Punktes $(t + h,\ u + k)$ von der Ebene, die die Fläche (1) in (t, u) berührt, so hat man wegen Gl. (9)

$$D\delta = \begin{vmatrix} \xi(t+h, u+k) - \xi(t,u) & \eta(t+h, u+k) - \eta(t,u) & \zeta(t+h, u+k) - \zeta(t,u) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial t} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}$$

wo D die positive Quadratwurzel aus folgender Größe ist:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial t} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{matrix} \right\|^2$$

oder, wenn wir uns auf die unendlich kleinen Glieder zweiter Ordnung beschränken,

$$2D\delta = h^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial t} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix} + 2hk \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial u} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial u} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial u} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial t} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix} + k^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial t} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}.$$

Jenachdem nun die Determinante dieser binären quadratischen Form in h, k größer, gleich oder kleiner als Null, ist der Punkt (t, u) hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch; folglich hat der Ort der parabolischen Punkte die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial t} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial t} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \cdot \partial u} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \cdot \partial u} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \cdot \partial u} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial t} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}^2 = 0. \quad \mathbf{(11'')}$$

226. Zu der angegebenen Unterscheidung der drei Arten von Punkten einer Fläche $\mathfrak{F}$ gelangt man auch durch Betrachtungen anderer Art, die wert sind, daß wir uns mit ihnen bekannt machen. Wir betrachten die Kurve Γ, in welcher die Berührungsebene τ_0 des gewöhnlichen Punktes P_0 die $\mathfrak{F}$ schneidet. Jede beliebige durch P_0 gehende in τ_0 gelegene Gerade g ist Tangente der Fläche, d. h. schneidet sie in zwei mit P_0 zusammenfallenden Punkten; diese gehören aber auch der Kurve Γ an, folglich berührt g auch die Kurve in P_0. Γ hat also die Eigenschaft, von jeder durch P_0 gehenden Geraden ihrer Ebene in P_0 berührt zu werden; dies erfordert aber nach Nr. 181, daß P_0 wenigstens ein Doppelpunkt (wenn nicht ein vielfacher Punkt) von Γ sei. **Also hat die Schnittkurve einer Berührungsebene mit einer Fläche im Berührungspunkte einen Doppelpunkt.**[1]) Die beiden Tangenten aber an Γ in P_0 schneiden Γ und folglich auch $\mathfrak{F}$ in dreizusammenfallenden Punkten, sie sind also die schon früher als solche bezeichneten Haupttangenten. Jenachdem diese reell und getrennt,

1) Die ∞^2 Berührungsebenen einer Fläche schneiden sie daher in ebensovielen Kurven, deren jede einen Doppelpunkt hat. Es sei im Vorübergehenden bemerkt, daß eine Fläche i. a. ∞^1 Berührungsebenen besitzt, deren Schnittkurve zwei Doppelpunkte besitzt, und eine endliche Anzahl, die drei derselben haben; es sind die sogenannten Bitangential- oder Tritangentialebenen.

zusammenfallend oder konjugiert imaginär sind, ist P_0 für Γ ein Knoten, eine Spitze, oder ein isolierter Punkt. Andererseits sahen wir, daß jene drei Fälle den drei genannten Arten von Punkten einer Fläche entsprachen, und somit können wir auch folgendes andere Kriterium aufstellen: **Ein Punkt einer Fläche ist hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch, jenachdem die zugehörige Berührungsebene die Fläche in einer Kurve schneidet, die in jenem Punkte einen Knoten, eine Spitze oder einen isolierten Punkt hat.**

227. Wir nehmen die Untersuchung der Gleichung (6) S. 142 wieder auf, lassen jedoch die bisher angenommene Bedingung fallen, daß nicht alle drei partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktion f gleich Null seien. Hingegen und allgemeiner wollen wir jetzt annehmen, daß für den (singulären) Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ nicht nur die Funktion f, sondern auch alle ihre Ableitungen bis zur $(r-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, nicht aber alle der r^{ten} Ordnung, gleich Null werden. Alsdann beginnt die Gl. (3) mit dem Gliede in ϱ^r, und folglich wird jede durch P_0 gezogene Gerade die $\mathfrak{F}$ in r mit P_0 zusammenfallenden Punkten schneiden; infolgedessen hat jeder durch P_0 gehende ebene Schnitt der Fläche diesen Punkt als r-fachen; man sagt dann, daß P_0 ein r-facher Punkt der Fläche sei. Damit also P_0 von dieser Beschaffenheit sei, müssen für seine Koordinaten, die Funktion f, die drei ersten, die sechs zweiten, ..., die $\frac{r(r+1)}{2}$ $(r-1)^{\text{ten}}$ Ableitungen nach x, y, z verschwinden, P_0 hat also im ganzen

$$1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{r(r+1)}{2} = \frac{r(r+1)(r+2)}{2\cdot 3}$$

Bedingungen zu genügen.

Angenommen nun, dies sei der Fall, so kann man sich fragen, ob man durch P_0 eine Gerade ziehen kann, die die Fläche nicht bloß in r, sondern in $r+1$ mit P_0 zusammenfallenden Punkten trifft. Es genügt offenbar, jetzt die Richtungskosinus der Geraden noch so zu wählen, daß auch der Koeffizient von ϱ^r in Gl. (3) verschwindet, mit anderen Worten, daß

$$\sum \frac{r!}{i!\,k!\,l!}\left(\frac{\partial^r f(x, y, z)}{\partial x^i\cdot\partial y^k\cdot\partial z^l}\right)_0 \cdot \cos^i\alpha\cdot\cos^k\beta\cdot\cos^l\gamma = 0;$$
$$[i \geqq 0,\ k \geqq 0,\ l \geqq 0,\ i+k+l=r].$$

Hieraus folgt, daß es ∞^1 solcher Geraden gibt, und diese bilden einen Kegel von der Ordnung r, der in folgender Weise dargestellt wird:

$$\sum \frac{r!}{i!\,k!\,l!}\left(\frac{\partial^r f(x, y, z)}{\partial x^i\cdot\partial y^k\cdot\partial z^l}\right)_0 (x-x_0)^i(y-y_0)^k(z-z_0)^l = 0.$$

Es ist der Tangentialkegel an die Fläche in dem betrachteten singulären Punkte. Man kann aber durch P_0 noch Gerade ziehen, die $\mathfrak{F}$

in $r+2$ mit P_0 zusammenfallenden Punkten treffen; hierzu ist nur erforderlich, daß auch der Koeffizient von ϱ^{r+1} in Gl. (3) verschwindet. Solche Geraden müssen dann auch auf einem Kegel von der Ordnung $(r+1)$ liegen, also gibt es im allgemeinen $r(r+1)$ solcher Geraden. Zusammenfassend können wir sagen: **Alle die ∞^2 Geraden, die durch einen r-fachen Punkt P_0 einer Fläche gehen, schneiden die Fläche in r mit P_0 zusammenfallenden Punkten; unter ihnen gibt es aber ∞^1 auf einem Kegel r^{ter} Ordnung gelegener Geraden, die mit der Fläche $r+1$ mit P_0 zusammenfallende Punkte haben, und $r(r+1)$, die deren $r+2$ haben.** Für $r=1$ umfaßt dieser Satz die schon (S. 143 u. 145) angegebenen Eigenschaften eines gewöhnlichen Punktes, der Tangentialebene und der Haupttangenten.

Aus den bekannten Eigenschaften der vielfachen Punkte einer ebenen Kurve (vgl. Nr. 181) und den angegebenen für die einer Fläche ergibt sich nun alsbald: **Schneidet man eine Fläche mit einer durch einen r-fachen Punkt gehenden Ebene, so erhält man eine Kurve, für die jener Punkt ein r-facher ist; die zugehörigen Kurventangenten sind dann die Schnitte jener Ebene mit dem Tangentialkegel jenes Punktes an die Fläche.**

Wir bemerken noch: **Schneidet eine Ebene τ_0 eine Fläche $\mathfrak{F}$ in einer Kurve Γ die in P_0 einen Doppelpunkt hat, so ist, wenn P_0 nicht auch für $\mathfrak{F}$ ein vielfacher Punkt ist, τ_0 die Tangentialebene an $\mathfrak{F}$ in P_0.** In diesem Falle, wird nämlich jede durch P_0 in τ_0 gezogene Gerade die Γ, und demnach auch $\mathfrak{F}$, in zwei mit P_0 zusammenfallenden Punkten schneiden, die Ebene τ_0 ist also der Träger eines Büschels von Tangenten; infolgedessen ist, da P_0 ein gewöhnlicher Punkt sein soll, τ_0 die Tangentialebene in P_0 an $\mathfrak{F}$.

228. Der einfachste Fall eines vielfachen Punktes entspricht der Annahme $r=2$; ein solcher Punkt heißt Doppelpunkt und sein Vorhandensein ist an das gleichzeitige Bestehen folgender vier Gleichungen geknüpft:

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 = 0. \qquad (12)$$

Da nun in (12) für die drei Unbestimmten x_0, y_0, z_0 vier Gleichungen bestehen sollen, so ist klar, daß, wenn man die Funktion ganz nach Belieben gewählt hat, dies **nicht** möglich ist, **somit besitzt eine Fläche im allgemeinen keine Doppelpunkte,** oder anders gesagt: **Flächen mit Doppelpunkten sind spezieller Art.** Daß dieser Satz *a fortiori* für vielfache Punkte gilt, ist offenbar. Aus den Gleichungen (12) und der Gl. $\Delta = 0$ (11) der parabolischen Kurve zieht man sofort den Schluß, daß diese Kurve durch die Doppelpunkte geht.

Nehmen wir an, daß die Gl. (12) erfüllt seien, dann hat der Berührungskegel an die Fläche in dem betrachteten Punkte (x_0, y_0, z_0) die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \cdots + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z}\right)_0 (y - y_0)(z - z_0) + \cdots = 0. \quad \textbf{(13)}$$

Hat nun dieser Kegel außer der Spitze noch einen und infolgedessen unendlich viele reelle Punkte, so heißt der Punkt P_0 ein Knotenpunkt der Fläche, da jeder durch P_0 gehende ebene Schnitt P_0 als Knotenpunkt hat; hat er aber außer dem Scheitel keinen reellen Punkt, so heißt er ein isolierter Punkt, da jeder P_0 enthaltende ebene Schnitt diesen Punkt als isolierten hat. Es kann auch der Fall eintreten, daß dieser Kegel in zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Ebenen zerfällt, alsdann heißt P_0 ein biplanarer Punkt, und die Bedingung hierfür ist

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sind im speziellen alle Determinaten 2ter Ordnung in dieser Determinante gleich Null, so reduziert sich der Kegel auf eine einzige in P_0 doppelt berührende Ebene, und P_0 heißt dann ein uniplanarer Punkt.

Dieser Klassifikation der Doppelpunkte einer Fläche entspricht eine andere der vielfachen Punkte, die eine größere Zahl von Fällen umfaßt; da sie keine prinzipielle Schwierigkeit bietet, so überlassen wir sie dem Leser als Übung.

Es kann auch vorkommen, daß eine Fläche eine aus lauter Doppelpunkten (oder vielfachen Punkten) bestehende Linie enthält, eine sogenannte Doppel- (bzw. vielfache) Linie. Ist nämlich die Funktion f beispielsweise von der Art, daß

$$f = \varphi_1{}^2 \cdot \psi_2 - \varphi_2{}^2 \cdot \psi_1,$$

so wird sein

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi_1 \left[2\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\,\psi_2 + \varphi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right] - \left[2\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\,\psi_1 + \varphi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right] \varphi_2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \varphi_1 \left[2\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\,\psi_2 + \varphi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial y}\right] - \left[2\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\,\psi_1 + \varphi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right] \varphi_2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \varphi_1 \left[2\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\,\psi_2 + \varphi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right] - \left[2\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\,\psi_1 + \varphi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial z}\right] \varphi_2;$$

demnach verschwindet für alle Punkte der Kurve $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ die Funktion f mit ihren drei ersten Ableitungen, also ist jene eine Doppelkurve der Fläche.

229. Wir nehmen noch einmal die Gl. (8) hervor, nämlich

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0; \quad . \quad (8)$$

sie stellt, wenn x_0, y_0, z_0 gegeben sind, wobei $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ ist, und

x, y, z variabel, die Gleichung der Tangentialebene im Punkte P_0 dar. Nehmen wir hingegen an, daß umgekehrt x_0, y_0, z_0 unbekannt, und x, y, z gegeben seien, so stellen die beiden zuletzt geschriebenen Gleichungen, die Gesamtheit der Punkte P_0 der Fläche dar, die die Eigenschaft haben, daß die zugehörigen Tangentialebenen durch den Punkt $P(x, y, z)$ gehen. Diese Punkte P_0 bilden eine (im allgemeinen räumliche) Kurve, die durch das System der Gleichungen (8) und

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

dargestellt wird. Offenbar ist sie auch der Ort der Berührungspunkte der von P and die Fläche $\mathfrak{F}$ gezogenen Tangenten, mit anderen Worten die Berührungskurve Φ von $\mathfrak{F}$ mit dem ihr umbeschriebenen Kegel, dessen Spitze in P liegt. Ist nun $\mathfrak{F}$ die Begrenzung eines undurchsichtigen Körpers, so trennt Φ den von P aus sichtbaren Teil von $\mathfrak{F}$ von dem unsichtbaren; daher heißt Φ (vgl. S. 27) der scheinbare Umriß der Fläche, gesehen von P aus[1]); wenn aber P ein leuchtender Punkt ist, so trennt Φ den beleuchteten Teil von $\mathfrak{F}$ von dem im Schatten liegenden und wird Schattenlinie genannt.

Setzen wir in Gl. (8)

$$x = \varrho \cdot \cos\alpha, \qquad y = \varrho \cdot \cos\beta, \qquad z = \varrho \cdot \cos\gamma$$

und lassen alsdann ϱ gegen ∞ konvergieren, so erhalten wir

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos\beta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \cos\gamma = 0, \quad . \quad . \quad (8^*)$$

und diese Gleichung im Verein mit $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ kann zur Bestimmung des scheinbaren Umrisses der Fläche in bezug auf einen unendlich fernen Punkt in der durch die Winkel α, β, γ bestimmten Richtung dienen. Insbesondere können die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 = 0$$

zur Bestimmung dieser Kurve in bezug auf die unendlich fernen Punkte der Koordinatachsen dienen.

Kennt man von der fraglichen Fläche die parametrische Darstellung (1), so ist die Gl. (9) S. 144 die des scheinbaren Umrisses, wenn man in ihr x, y, z als gegeben ansieht und t_0, u_0 als variabel; ist aber der feste Punkt unendlich fern, so tritt an Stelle von (9) die folgende Gleichung ein

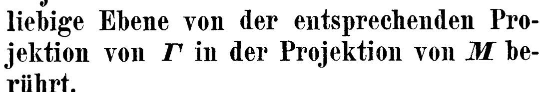
$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_0 & \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_0 & \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)_0 & \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\right)_0 & \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right)_0 \end{vmatrix} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9^*)$$

---

1) Der Name *ligne de contour apparent* findet sich zum ersten Mal in der *Mémoire sur la théorie des deblais et remblais* von Monge (s. S. 694 *der Mém. de l'Acad. des Sciences.* Année MDCCLXXXI, Paris 1784).

Der scheinbare Umriß einer Fläche erfreut sich einer wichtigen Eigenschaft, die ausgesprochen wird durch den folgenden

Satz: Ist Φ der scheinbare Umriß einer Fläche $\mathfrak{F}$ gesehen von einem Punkte C, und Γ eine beliebige Kurve auf $\mathfrak{F}$, die Φ in M schneidet, so wird die Projektion von Φ von C aus auf eine beliebige Ebene von der entsprechenden Projektion von Γ in der Projektion von M berührt.



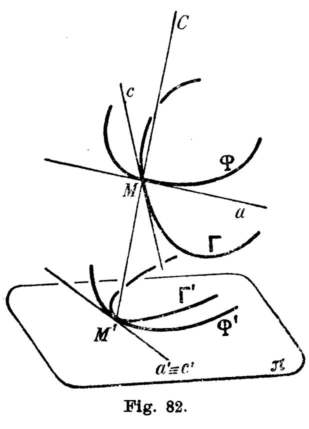


Fig. 82.

Beweis. Es seien (Fig. 82) a und c die beiden Tangenten in M an Φ und Γ, von denen wir der Allgemeinheit wegen annehmen, daß keine durch das Projektionszentrum C gehe; sie bestimmen dann die Tangentialebene in M an die Fläche $\mathfrak{F}$. Nun gehen aber alle Tangentialebenen, die $\mathfrak{F}$ in Punkten von Φ berühren, durch den Punkt C, gemäß der Definition, also ist $(a\ c)$ eine projizierende Ebene, und infolgedessen fallen die Projektionen a', c', die Tangenten an Φ' und Γ' zusammen in die Spurlinie der Ebene $(a\ c)$. Φ' und Γ' haben daher in M' eine gemeinsame Tangente, d. h. sie berühren sich daselbst, w. z. b. w.

Denken wir uns die Fläche $\mathfrak{F}$ erzeugt durch die Bewegung einer Kurve Γ i. a. verbunden mit einer Deformation (S. 140), so wird die soeben aufgestellte Eigenschaft für alle Lagen von Γ gelten. Φ' wird daher von ∞^1 Lagen der Kurve Γ' berührt werden, mit anderen Worten, es ist die Enveloppe dieser Kurven. Wir haben daher den **Satz: Wird eine Fläche durch eine i. a. mit Deformation verbundenen Bewegung einer Kurve erzeugt, so ist die Projektion des scheinbaren Umrisses der Fläche von jedem Zentrum C auf eine beliebige Ebene π die Enveloppe der Projektionen der ∞^1 Lagen dieser erzeugenden Kurve von jenem Punkte C auf π.**

Zur Übung: Den obigen Satz für Figur 80 a. S. 136 zu verifizieren.

Anwendung. $\mathfrak{F}$ sei eine Kugel; der ihr umschriebene Kegel mit der Spitze in dem beliebigen Raumpunkte C ist Kreiskegel; er wird daher von einer beliebigen Ebene π in einem Kegelschnitt Γ' geschnitten, der die Projektion des Kreises Γ, des scheinbaren Umrisses von $\mathfrak{F}$ ist gesehen von C aus. Es sei ferner K der Kreis, in dem die Kugel von einer zu π parallelen Ebene σ geschnitten wird; er schneidet den Kreis Γ in zwei Punkten, zufolge des vorigen Satzes ist also K' doppeltberührend für Γ'. Insbesondere wenn σ eine der zu π parallelen Berührungsebenen ist, so ist K ein Kreis mit dem Radius 0, der zum Zentrum einen der Endpunkte F_1, F_2 des zu π senkrechten Durchmessers von $\mathfrak{F}$ hat. K' hat also auch den Radius Null. F_1', F_2' sind also auch Nullkreise, die Γ' doppelt berühren, sie sind also die Brennpunkte von Γ'. **In der Zentral- (oder Parallel-) Projektion einer Kugel sind die Brennpunkte des scheinbaren Umrisses die Projektionen der Endpunkte des zur Projektionsebene senkrechten Durch-**

messers der Kugel. Wenn insbesondere die Projektionsebene π mit einer der betrachteten Berührungsebenen σ zusammenfällt, so fällt F_1' mit F_1 zusammen und man erhält den bekannten **Satz von Quetelet-Dandelin: Wird ein gerader Kegel von einer Ebene geschnitten, so sind die Brennpunkte des Kegelschnittes, die Berührungspunkte der beiden Kugeln, die dem Kegel einbeschrieben sind und jene Ebene berühren.**

Die obigen Sätze und Überlegungen lassen sich auch anwenden auf die Flächen zweiter Ordnung, wenn man beachtet, daß die Ebenen, die parallel zur Berührungsebene eines Nabelpunktes sind, die Fläche in einem Kreise schneiden. Man gelangt dann zu folgendem Satze: **Projiziert man eine Fläche zweiter Ordnung zentral oder parallel auf eine Ebene, die parallel zu einem Kreisschnitt der Fläche ist, so erhält man als Projektion des scheinbaren Umrisses einen Kegelschnitt, der zu Brennpunkten die Projektionen der beiden Nabelpunkte hat, die auf den Endpunkten des zur Projektionsebene konjugierten Durchmessers der Fläche liegen.**

230. Aus der Gleichung der Tangentialebene im Punkte $P(x, y, z)$ an die Fläche $f(x, y, z) = 0$ (s. Nr. 223) ergibt sich die folgende analytische Darstellung der Normale n im Punkte (x, y, z) zur Fläche

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \qquad \ldots \ldots \quad (14)$$

wo X, Y, Z die laufenden Koordinaten sind; hieraus ergibt sich, daß die Winkel λ, μ, ν, die n mit den Koordinatachsen bildet, durch folgende Formeln bestimmt sind:

$$\cos\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{W}, \quad \cos\mu = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{W}, \quad \cos\nu = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{W}, \quad \text{wo } W = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Betrachten wir jetzt eine beliebige Richtung d, die mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet, so hat der Winkel (dn) als Kosinus

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma}{W}.$$

Wollen wir daher diejenigen Punkte der Fläche haben, für die jener Winkel (dn) konstant ist, so erhalten wir eine Folge von ∞^1 Kurven, die die Schnitte der gegebenen Fläche $\mathfrak{F}$ mit den ∞^1 Flächen sind, deren Gleichung lautet

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = l \text{ (Konst.)} \quad \ldots \quad (15)$$

Jene Kurven treten als sehr wichtig bei der Untersuchung der Beleuchtung der Flächen auf (die Lichtstrahlen parallel vorausgesetzt) und heißen Isophoten, während die durch Gl. (15) dargestellten Flächen Isophotoiden genannt werden.

Ist die Gleichung der Fläche nach einer der Koordinaten, z. B. nach z aufgelöst (vgl. S. 145), also $f(x, y, z) = z - F(x, y)$, so wird die Gleichung der Isophotoiden zu

$$\frac{\cos\gamma - \cos\alpha \cdot \frac{\partial F}{\partial x} - \cos\beta \cdot \frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}} = l; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Da diese nicht mehr z enthält, so stellt sie einen Zylinder dar; interpretieren wir sie als Gleichung einer ebenen Kurve, so stellt sie die Projektion der Isophote auf die xy-Ebene dar. Dieser Umstand läßt sich nützlich verwenden, wenn man die Darstellung des Systems der Isophoten einer Fläche nach der Mongeschen Methode erhalten will, falls eine Projektionsebene zur xy-Ebene parallel ist.

Zur Übung. Ist die Lichtquelle nicht unendlich fern, also ein eigentlicher Punkt (a, b, c), so treten als Isophotoiden der Fläche $f(x, y, z) = 0$ folgende Flächen ein:

$$\frac{(a-x)\frac{\partial f}{\partial x} + (b-y)\frac{\partial f}{\partial y} + (c-z)\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}\,\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = l.$$

§ 2. Flächen als Enveloppen von Ebenen.

231. Ist, wie wir im vorigen gesehen haben, eine Fläche als Ort von ∞^2 Punkten gegeben, so ist damit zugleich eine Folge von ∞^2 Ebenen bestimmt, deren jede Berührungsebene der Fläche ist. Nun nehmen wir umgekehrt an, daß zunächst eine doppelt unendliche Folge von Ebenen gegeben sei, dargestellt durch eine Gleichung von der Form

$$\varphi(t, u) \cdot x + \psi(t, u) \cdot y + \chi(t, u) \cdot z + \omega(t, u) = 0,$$

wo die $\varphi, \ldots, \omega$ bekannte Funktionen der beiden Parameter t, u sein sollen. Wir betrachten nun die drei Ebenen π_0, π_1, π_2 dieser Folge, die den Parameterwerten t_0, u_0; $t_0 + h, u_0$; $t_0, u_0 + k$ entsprechen; lassen wir dann die h und k nach Null hin konvergieren, so sehen wir, daß der Punkt $(\pi_0\, \pi_1\, \pi_2)$ einer im allgemeinen bestimmten und eindeutigen Lage zustrebt, die wir als den Berührungspunkt der Ebene (t_0, u_0) mit ihrer eigenen Enveloppe bezeichnen wollen. Die Koordinaten dieses Punktes erhält man durch Auflösung der drei Gleichungen

$$\varphi(t_0, u_0) \cdot x + \chi(t_0, u_0) \cdot y + \psi(t_0, u_0) \cdot z + \omega(t_0, u_0) = 0,$$
$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_0 z + \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)_0 = 0,$$
$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)_0 z + \left(\frac{\partial \omega}{\partial u}\right)_0 = 0.$$

Variiert man hierin t_0, u_0, so erhält man ∞^2 Punkte, deren Koordinaten Ausdrücke haben die man erhält, wenn man diese drei Glei-

chungen nach x, y, z auflöst, es sind also Ausdrücke von folgender Form:

$$x = \xi(t_0, u_0), \quad y = \eta(t_0, u_0), \quad z = \zeta(t_0, u_0).$$

Da nun diese von der Gestalt der Gl. (1) sind, so stellen sie eine Fläche dar, für welche die ursprünglich gegebenen Ebenen Tangentialebenen sind. Damit ist erwiesen, daß eine Folge von ∞^2 Ebenen i. a. mit einer Fläche als Ort von ebensoviel Punkten verknüpft ist. Infolgedessen läßt sich jede Fläche von zwei zueinander dualen Gesichtspunkten ansehen, nämlich als geometrischer Ort ihrer Punkte und als Enveloppe ihrer Berührungsebenen. Demzufolge bieten sich die Eigenschaften einer Fläche immer paarweise dar, man erhält den Ausdruck für die eine, wenn man auf den der anderen das Gesetz der Dualität im Raume anwendet. Machen wir hiervon eine Anwendung.

Wir sahen S. 149, daß es auf einer Fläche zuweilen Punkte gibt, die nicht nur eine, sondern unendlich viele Tangentialebenen zulassen, die einen Kegel zweiter Ordnung umhüllen. Dementsprechend gibt es Tangentialebenen, die nicht einen, sondern unendlich viele Berührungspunkte mit der Fläche haben, die auf einem Kegelschnitte liegen: dieser kann reell oder imaginär sein, eigentlich oder zerfallend in zwei Punkte, die reell getrennt, zusammenfallend oder konjugiert imaginär sind, oder in zwei Geraden. Solche Ebenen heißen Doppelberührungsebenen der Fläche. — Wir überlassen es dem Leser, in gleicher Weise den Begriff und die Eigenschaften der vielfach berührenden Ebenen aufzustellen.

§ 3. Algebraische Flächen.

232. Läßt sich die linke Seite der Gl. (2) S. 141 auf ein ganzes Polynom in x, y und z zurückführen, so heißt die Fläche algebraisch, im anderen Falle transzendent. Im ersten Falle hat der Grad n des Polynoms eine sehr wichtige geometrische Bedeutung. Um diese darzutun, betrachten wir zugleich mit der Fläche $\mathfrak{F}$ eine beliebige Gerade g

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma};$$

die Schnittpunkte entsprechen den Wurzeln der Gleichung (6′) in Nr. 223 die jetzt mit ϱ endet, da alle die Abgeleiteten von $f(x, y, z)$ von der $(n+1)$-ten an identisch Null sind. Da nun diese Gleichung vom Grade n in ϱ ist, so hat sie n Wurzeln, und **demnach wird die Fläche $\mathfrak{F}$ von jeder Geraden des Raumes in n Punkten geschnitten.** Man drückt dies aus, indem man sagt, **die Fläche ist von der n^{ten} Ordnung; die Ordnung einer algebraischen Fläche bezeichnet also die Zahl der Schnitte mit einer beliebigen Geraden des Raumes.** Hat eine Gerade mit einer Fläche n^{ter} Ordnung $(n+1)$ Punkte gemeinsam, so liegt sie ganz auf der Fläche. Da in einem n-fachen Punkte der Fläche



$f(x, y, z) = 0$ alle die partiellen Ableitungen der Funktion f gleich Null sind, so ist $r \leqq n$; im Grenzfalle $r = n$ enthält die Fläche jede durch den n-fachen Punkt gehende Gerade, d. h. ∞^1 Geraden: **sie ist daher ein Kegel** (vgl. Nr. 227).

Aus dem ersten der obigen Sätze ergibt sich nun: **Jede Ebene des Raumes schneidet eine Fläche n^{ter} Ordnung in einer Kurve n^{ter} Ordnung.** Insbesondere hat jede algebraische Fläche n^{ter} Ordnung auch im Unendlichen eine Kurve derselben Ordnung, die von jedem beliebigen Punkte des Raumes, z. B. vom Anfangspunkt aus, durch einen Kegel n^{ter} Ordnung projiziert wird. Um die Gleichung dieses Kegels zu finden, setzen wir in die Gleichung der Fläche — die wir wie folgt schreiben werden:

$$\sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y, z) = 0, \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

wo f_r eine ternäre Form r^{ter} Ordnung in x, y, z ist —

$$x = \varrho \cdot \cos\alpha, \quad y = \varrho \cdot \cos\beta, \quad z = \varrho \cdot \cos\gamma$$

ein, dividieren durch ϱ^n und lassen dann $\varrho = \infty$ werden. Gehen wir dann zur Grenze über, so erhalten wir als Resultat

$$f_n(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = 0$$

oder

$$f_n(x, y, z) = 0,$$

als die gesuchte Gleichung.

Wenden wir auf den Begriff der Ordnung das Gesetz der Dualität an, so können wir als Klasse einer algebraischen Fläche die Zahl der Tangentialebenen bezeichnen, die durch eine beliebige Gerade des Raumes gehen. Um zu zeigen, daß diese Zahl bestimmt und endlich ist, nehmen wir zwei beliebige Punkte des Raumes $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$ und bezeichnen mit $P(x, y, z)$ einen Punkt der Fläche derart, daß die zugehörige Berührungsebene durch die beiden Punkte P_1 und P_2 (und demnach auch durch die sie verbindende Gerade g) geht. Es bestehen dann die folgenden drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) = 0, \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 (x - x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 (y - y_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1 (z - z_1) = 0, \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_2 (x - x_2) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_2 (y - y_2) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_2 (z - z_2) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

die zur Bestimmung der Koordinaten von P dienen können. Da sie nun ein bestimmtes System algebraischer Gleichungen bilden, so lassen sie nur eine bestimmte und endliche Zahl von Lösungen zu, die unabhängig von den Werten der Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 ist. Diese Zahl stellt die Klasse der Fläche dar.

Zwei algebraische Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ von der Ordnung n_1 und n_2 schneiden sich in einer algebraischen Kurve von der Ordnung $n_1 \cdot n_2$. Nämlich eine beliebige Ebene ε schneidet $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ in zwei Kurven Γ_1 und Γ_2 von der Ordnung n_1 und n_2, und deren Schnitte sind sämtlich und nur allein die Punkte, die ε gemeinsam hat mit der Schnittkurve von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$. In speziellen Fällen kann diese Kurve in mehrere Teile von niedrigerem Grade zerfallen.

Drei algebraische Flächen von der Ordnung n_1, n_2, n_3 schneiden sich im allgemeinen in $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ Punkten. Diese Zahl ist nämlich die Anzahl der Lösungen des Systems der drei Gleichungen der Flächen. Dual hierzu gilt: **Drei algebraische Flächen von der Klasse ν_1, ν_2, ν_3 haben $\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \nu_3$ Tangentialebenen gemeinsam.**

Kehren wir zur Gleichung (17) zurück, um zu bemerken, daß ihre linke Seite

$$1+3+6+\cdots+\frac{(r+1)(r+2)}{2}+\cdots+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

Glieder umfaßt und daher ebensoviele Koeffizienten. Da man aber die Gleichung der Fläche mit einer beliebigen Konstanten multiplizieren oder dividieren darf, die weder Null noch unendlich groß ist, so reduziert sich die Zahl der angeführten Koeffizienten auf

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3}-1.$$

Hieraus folgt dann (in ähnlicher Weise wie für die ebenen Kurven, vgl. Nr. 187) daß **eine algebraische Fläche n^{ter} Ordnung im allgemeinen durch**

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3}-1$$

einfache Punkte, durch die sie hindurchgehen soll, bestimmt ist.

Dual hierzu:
$$\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{1\cdot 2\cdot 3}-1$$

Ebenen bestimmen im allgemeinen eine Fläche ν^{ter} Klasse, die alle diese berührt.

Wir betrachten wiederum eine algebraische Fläche $\mathfrak{F}$ von der Ordnung n, einen beliebigen Punkt des Raumes P und den von P aus der $\mathfrak{F}$ umschriebenen Kegel. Eine beliebige durch P gelegte Ebene ε schneidet $\mathfrak{F}$ in einer Kurve Γ; die von P an Γ gezogenen Tangenten sind die in ε gelegenen Erzeugenden jenes Kegels. Ihre Zahl ist somit gegeben, sei es als Klasse von Γ, oder als Ordnung des umschriebenen Kegels oder auch als Ordnung der Projektion des scheinbaren Umrisses der von P aus gesehenen Fläche auf eine beliebige Ebene: sie heißt der Rang der Fläche. Man kann bemerken: **Die Klasse jedes umbeschriebenen Kegels ist gleich der Klasse der Fläche.**

Zur Übung: Die Isophotoiden (Nr. 230) einer algebraischen Fläche n^{ter} Ordnung sind im allgemeinen algebraische Flächen $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung; ein r-facher Punkt der Fläche ist $2(n-r)$ fach für alle Isophotoiden.

§ 4. Graphische Darstellung einer Fläche.

233. I. Nach der Mongeschen Methode. Eine Fläche läßt sich durch die mit einer Deformation verbundene Bewegung einer Kurve auf unendlich viele Weisen erzeugen (vgl. Nr. 222); unter diesen fassen wir diejenige Erzeugung ins Auge, bei der die Erzeugenden Kurven sind, die sich in möglichst einfacher Weise zeichnen lassen; alsdann ergibt sich die Darstellung der Fläche aus der ihrer einzelnen Erzeugenden. Ist die Fläche dagegen von einem doppelten Netze von Erzeugenden überzogen, so wird es ratsam sein, um die Deutlichkeit der Darstellung zu erhöhen, die beiden Systeme der Erzeugenden darzustellen, wie dies z. B. bei der üblichen geographischen Darstellung der Erdkugel geschieht. Die Bildebene wird man zweckmäßig in der Art wählen, daß dadurch eine Vereinfachung der Figuren eintritt; ist z. B. die Fläche symmetrisch in bezug auf eine Ebene, so wird man gut tun, eine der Bildebenen zu dieser parallel zu nehmen. Nützlich wird es auch sein, die Spuren der Fläche in den Bildebenen zu zeichnen; jede von diesen ist der Ort der Spurpunkte der Erzeugenden, und man erhält sie in der früher (Nr. 206) angegebenen Weise. Zuweilen wird man auch die Spur der Fläche in den Halbierungsebenen angeben, die man erhält durch Anwendung der in derselben Nr. 206 gemachten Bemerkungen. Auch den Seitenriß wird man zur Hilfe nehmen, wenn dies für die Auffassung der betrachteten Fläche von Nutzen ist. Ferner wird es zur Erleichterung dienen, die sichtbaren Teile von den unsichtbaren zu unterscheiden, wenn die Fläche als undurchsichtig betrachtet wird. Auf jeden Fall müssen die Daten so beschaffen sein, daß man durch ein geeignetes Verfahren die zweite Projektion eines Punktes der Fläche finden kann, wenn man die erste kennt, und umgekehrt.

Vor allem wichtig aber sind die Projektionen des scheinbaren Umrisses der Fläche gesehen vom Zenit der Bildebenen aus. Der Grundriß der ersten ist die Enveloppe aller ersten Projektionen der Erzeugenden eines Systems. Ist $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Fläche, so folgt aus Nr. 229, daß die Gleichung der Projektion des ersten scheinbaren Umrisses das Resultat der Elimination von z aus den Gleichungen $f(x, y, z) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ ist. Ähnliches gilt für den zweiten scheinbaren Umriß.

Beispiel: In den folgenden Kapiteln, in denen wir mehrere Arten von Flächen untersuchen, werden wir Gelegenheit haben, diese allgemeinen Betrachtungen an verschiedenen Beispielen zu illustrieren; um aber schon jetzt das Unbestimmte unserer Ausführungen soweit als möglich zu beseitigen, möge folgendes Beispiel zur Aufklärung dienen.

Mit bezug auf ein kartesisches Achsensystem mögen die beiden Kurven Γ_1, Γ_2 gegeben sein durch folgende parametrische Darstellung:



$$\left.\begin{aligned} x = \varphi_1(t), \quad y = \psi_1(t), \quad z = \chi_1(t); \\ x = \varphi_2(u), \quad y = \psi_2(u), \quad z = \chi_2(u). \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

Setzt man alsdann

$$x = \varphi_1(t) + \varphi_2(u), \quad y = \psi_1(t) + \psi_2(u), \quad z = \chi_1(t) + \chi_2(u) \tag{II}$$

so erhält man die parametrische Darstellung einer sogenannten Translationsfläche, und diese wollen wir in einem Mongeschen System darstellen, das die xy-Ebene als Grundriß-, die xz-Ebene als Aufrißebene hat. Im allgemeinen wird die Fläche die Kurven Γ_1 und Γ_2 nicht enthalten; damit sie Γ_1 enthalte, muß es einen Wert von u geben, der zugleich die Funktionen φ_2, ψ_2, χ_2 verschwinden läßt, während zu gleicher Art φ_1, ψ_1, χ_1 verschwinden müssen, wenn sie Γ_2 enthalten soll.

Um nun die Fläche zu zeichnen (Fig. 83) nehmen wir auf Γ_1 beliebig den Punkt P_1, auf Γ_2 den P_2; ist P die vierte Ecke des Parallelogramms PP_1OP_2, so ist offenbar P ein Punkt der fraglichen Fläche. Halten wir nun P_1 fest, und variieren P_2 auf Γ_2, so ist der Ort Γ, der Punkte P eine Kurve (t), und man erhält diese, indem man durch die sämtlichen Punkte von Γ_2 Strecken zieht gleich und gleichgerichtet mit OP_1. Demnach ist Γ die Lage, die Γ_2 annimmt durch die, durch die Strecke OP_1 bestimmte Translation. Alle Erzeugenden des einen Systems sind also einander identische Kurven; dasselbe gilt von denen des anderen Systems. Da nun jede Parallelprojektion ein Parallelogramm in ein anderes verwandelt, so gestattet das obige Verfahren, wenn die Projektionen von Γ_1 und Γ_2 gegeben sind, die beiden Systeme von Erzeugenden punktweise in Grund- und Aufriß zu konstruieren. — Ferner die Tangenten in P und P_2 an Γ und Γ_2 sind einander parallel; sind demnach die Konstruktionen der Tangenten an Γ_1 und Γ_2 bekannt, so kann man auch in jedem Punkte, in welchem die beiden Erzeugenden der Translationsfläche sich kreuzen, an diese die Tangenten konstruieren und demnach auch die Tangentialebene der Fläche. — Ein anderes Verfahren, die Fläche darzustellen ist folgendes: Wir betrachten die beiden Kurven Δ_1 und Δ_2 mit folgender Gleichung

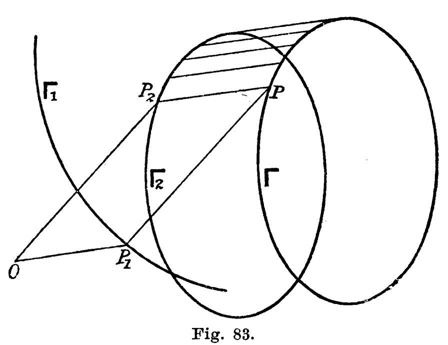


Fig. 83.

$$\begin{aligned} x = 2\varphi_1(t), \quad y = 2\psi_1(t), \quad z = 2\chi_1(t), \\ x = 2\varphi_2(u), \quad y = 2\psi_2(u), \quad z = 2\chi_2(u); \end{aligned}$$

dann ist Δ_1 die zu Γ_1 ähnliche und ähnlich gelegene Kurve mit dem Ähnlichkeitszentrum in O, und 2 ist das Ähnlichkeitsverhältnis; man erhält daher die Projektion von Δ_1 leicht aus der von Γ_1. Ebenso verhält es sich mit Δ_2. Ist nun Q_1 ein beliebiger Punkt von Δ_1, Q_2 einer von Δ_2, so wird augenscheinlich der Mittelpunkt der Strecke Q_1Q_2 ein Punkt der Fläche sein.

Nach Gl. (9) in Nr. 224 ist die allgemeine Gleichung der Tangentialebene an die Fläche

$$\begin{vmatrix} x - [\varphi_1(t) + \varphi_2(u)] & y - [\psi_1(t) + \psi_2(u)] & z - [\chi_1(t) + \chi_2(u)] \\ \varphi_1'(t) & \psi_1'(t) & \chi_1'(t) \\ \varphi_2'(u) & \psi_2'(u) & \chi_2'(u) \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Ebene ist parallel zur z-Achse, wenn t, u der Bedingung genüge leisten, daß

$$\begin{vmatrix} \varphi_1'(t) & \psi_1'(t) \\ \varphi_2'(u) & \psi_2'(u) \end{vmatrix} = 0.$$

Um diese zu interpretieren, betrachten wir die (ersten) Projektionen Γ_1', Γ_2' von Γ_1 und Γ_2; sie haben als parametrische Darstellung: die erste $x = \varphi_1(t)$, $y = \psi_1(t)$, die zweite $x = \varphi_2(u)$, $y = \psi_2(u)$.

Die vorige Bedingung sagt nun, daß für einen Punkt P des ersten scheinbaren Umrisses der Fläche die Tangenten in P_1' und P_2' der Kurven Γ_1' und Γ_2' einander parallel seien. Daher haben wir folgende Konstruktion der Projektion des ersten scheinbaren Umrisses (Fig. 84): Man nehme auf Γ_1' beliebig den Punkt P_1' und suche auf Γ_2' den Punkt P_2' auf, in welchem die Tangente an Γ_2' parallel zu der in P_1' an Γ' ist. Die vierte Ecke des Parallelogramms $P_1' O P_2'$ ist die Projektion P' eines Punktes des scheinbaren Umrisses. Ähnliche Betrachtungen und Konstruktionen können auf den zweiten scheinbaren Umriß angewandt werden. Zu seiner Übung möge der Leser die hier angedeuteten Operationen vollständig ausführen, indem er für Γ_1 und Γ_2 bestimmte spezielle Kurven nimmt.

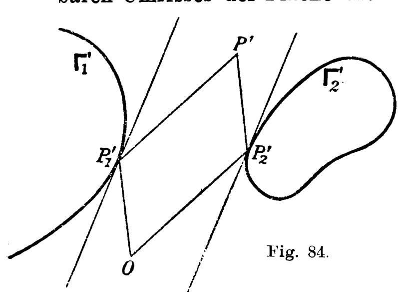


Fig. 84.

Zur Übung: Welche Translationsfläche entsteht, wenn Γ_1 und Γ_2 gerade Linien sind, und welche, wenn Γ_1 eine Gerade, Γ_2 ein Kreis oder eine andere Kurve ist?

234. II. Nach der Methode der Zentralprojektion. Die zu Anfang dieser Nr. gemachten allgemeinen Bemerkungen sind im wesentlichen auch anwendbar bei der Darstellung einer Fläche in Zentralprojektion. In diesem Falle hat man nur einen scheinbaren Umriß, nämlich den in bezug auf das Projektionszentrum und nur eine Spurlinie, nämlich die in die Projektionsebene; ferner hat man die Fluchtlinie, als die Projektion der unendlich fernen Linie der Fläche.

III. Nach der Methode der kotierten Ebenen. Diese Methode ist besonders wertvoll für die Darstellung solcher Flächen, die sich durch eine Gleichung von der Form $z = \varphi(x, y)$ darstellen lassen, wo φ eine Funktion derart ist, daß sie für jedes reelle Wertepaar x, y einen einzigen reellen Wert für z annimmt. Solche Flächen heißen topographische Flächen. Es ist ratsam als Grundebene die xy-Ebene zu wählen. Die Schnitte der Fläche mit den zur Grundebene parallelen Ebenen heißen Niveaulinien, Höhenkurven, oder Schichtlinien. Die Gleichung ihrer Projektionen auf die Grundebene ist dann $\varphi(x, y) = Const.$ Um ein deutliches Bild der Fläche zu erhalten, zeichnet man diejenigen Niveaulinien, die sich ergeben, wenn man die Schnittebenen nach einem bestimmten Gesetze aufeinanderfolgen läßt, z. B. die Ebenen mit den Koten 0, 1, 2, 3 ..., oder deren Koten ein ganzes Vielfaches oder einen aliquoten Teil der Maßeinheit betragen.[1]) Aus ihnen läßt sich dann, wenn sie in genügender Anzahl vorhanden sind, eine vollständige Vorstellung von der Gestalt der Fläche gewinnen.

1) Dieses System ist gewiß dem Leser geläufig, da es bei unseren Meßtischblättern immer angewandt ist.

Wachsen z. B. die Koten von außen nach innen, so haben wir es mit einem erhabenen konvexen Teil der Fläche zu tun, wie bei Fig. 86; im umgekehrten Falle (Fig. 85) ist die Fläche für einen auf die horizontal gedachte Grundebene von oben blickenden Zuschauer vertieft (konkav). Eine genauere Vorstellung von der Gestalt der Fläche erhalten wir aber, wenn wir uns senkrecht zur Grundebene stehende Schnitte mit der Fläche konstruieren.

Ist (s. Fig. 86) s' die Spurlinie einer solchen Ebene, so bezeichne man die Punkte in denen s' die Niveaulinien $0, 1, 2, 3 \ldots$ trifft, mit $A_0' A_1'$ $A_2' A_3' \ldots$ dann sind diese die Projektionen derjenigen Punkte der Schnittlinie, die die Koten $0, 1, 2, 3 \ldots$ haben. Übertragen wir nun die Punktreihe $A_0', A_1', A_2' \ldots$ auf eine beliebige Gerade s, errichten in diesen Punkten die Senkrechten $A_1' A_1 = 1,\ A_2' A_2 = 2,\ A_3' A_3 = 3 \ldots$ und verbinden die Endpunkte durch einen stetigen Zug, so erhalten wir die Kurve Σ, die identisch ist mit jener Schnittlinie.

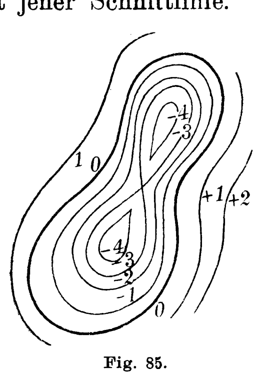


Fig. 85.

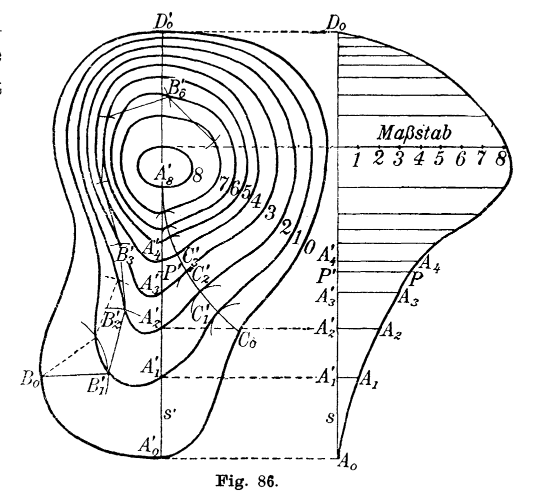


Fig. 86.

Durch dieselbe Betrachtung gelangen wir auch zur **graphischen Bestimmung der Kote eines beliebigen,** durch seine Projektion P' gegebenen **Punktes der Fläche.** Ziehen wir nämlich durch P' eine beliebige Gerade s' und zeichnen uns wie eben den Schnitt der durch s' gelegten zur Grundebene senkrechten Ebene mit der Fläche, tragen in die Punktreihe $A_1', A_2', A_3' \ldots$ auch den Punkt P' ein, und errichten dort die Senkrechte, die Σ in P trifft, so ist $P'P$ die gesuchte Kote. Umgekehrt kann man auch die Projektion derjenigen Punkte P jenes Schnittes finden, die eine gegebene Kote m haben; wiederholt man diese Konstruktion für unzählig viele Vertikalschnitte, so gelangt man zur Konstruktion einer Niveaulinie, die in der betrachteten Reihe noch nicht enthalten ist (Interkalar-Kurve).

Betrachten wir auf der dargestellten Fläche zwei Punkte $M \equiv (M', m)$ und $N \equiv (N', n)$, deren Koten nur wenig voneinander

verschieden sind, so darf man die Strecke MN als näherungsweise der Fläche angehörend betrachten, und ist dann φ die Neigung der Geraden MN gegen die Grundebene, so haben wir $\operatorname{tg}\varphi = \frac{|m-n|}{M'N'}$. Hieraus folgt nun: wenn $m - n$ konstant ist, und ebenfalls φ, so muß auch $M'N'$ konstant bleiben. Beschreiben wir daher um einen beliebigen Punkt B_0 (s. Fig. 86) der Niveaulinie 0 mit dem Radius $\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}$ einen Kreis, so wird dieser die Niveaulinie 1 in einer gewissen Zahl von Punkten schneiden, von denen einer B_1' sein möge. Beschreiben wir um diesen mit demselben Radius einen Kreis, der die Niveaulinie 2 in B_2' schneidet, usf., so erhalten wir eine Reihe von Punkten B_0, B_1', B_2', B_3', ..., welche die Projektionen eines Linienzuges sind, dessen sämtliche Teilstücke mit der Grundebene denselben Winkel φ bilden. Denken wir uns die Niveaulinien einander unendlich nahe, so verwandelt sich dieser Linienzug in eine Kurve, deren Tangenten mit der Grundebene alle denselben Winkel bilden, eine Linie gleicher Neigung (oder Steigung) auf der betrachteten Fläche.

Eine ähnliche Konstruktion führt zu einer anderen Art bemerkenswerter Linien. Wir nehmen einen Punkt C_0 auf der 0-Linie und beschreiben um ihn einen Kreis, der die Projektion der Niveaulinie 1 in C_1' berührt; um C_1' beschreiben wir wieder einen Kreis der die Projektion der Niveaulinie 2 berührt usf. (s. Fig. 86). So erhalten wir die Projektion eines Linienzuges dessen Strecken die größte Neigung gegen die Grundebene haben, indem z. B. die Strecke C_1C_2 von allen die kürzeste ist, die C_1 mit Punkten der Niveaulinie 2 verbinden, also ist $\operatorname{tg}\varphi$ und somit φ ein Maximum. Beim Übergang zur Grenze entsteht daraus eine Kurve, die man als Linie größter Neigung bezeichnet; diese Linien spielen eine wichtige Rolle in der Topographie. Durch jeden Punkt der Fläche geht eine solche Linie. Die Linien kleinster Neigung sind offenbar die Niveaulinien selbst.

Beachten wir auch daß die Tangente c_2' an die Niveaulinie in C_2' senkrecht zur Strecke $C_1'C_2'$, und da c_2' horizontal verläuft, so ist auch (vgl. Nr. 30) c_2 senkrecht zu C_1C_2. Hieraus folgt: **Die Linien größter Neigung sind die Orthogonaltrajektorien der Niveaulinien einer Fläche; ebenso sind auch die Projektionen der ersteren die Orthogonaltrajektorien der Projektionen der letzteren.**

Ist also $z = \varphi(x, y)$ die Gleichung der Fläche, also $\varphi(x, y) = Const.$ die allgemeine Gleichung der Niveaulinien, so projizieren sich die Linien größter Neigung in die Integralkurven der Differentialgleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dx = 0\,[1].$$

---

1) Für weitere Einzelheiten über topographische Flächen empfehlen wir

Zur Übung: I. Die kotierte Darstellung einer Fläche zeigt konzentrische Kreise deren Radien den Koten umgekehrt proportional sind. Was ist das für eine Fläche? — **II.** Welche Bedeutung hat es, wenn die Projektionen zweier Niveaulinien sich berühren, wenn sie alle durch einen Punkt gehen, oder alle eine Gerade berühren? — **III.** Welche Verhältnisse ergeben sich, wenn man die Betrachtungen der beiden vorigen Nr. auf andere im I. Teil behandelte Darstellungsmethoden anwendet?

§ 5. Allgemeines über die Aufgaben aus der darstellenden Geometrie der Flächen.

235. a) Welches auch immer die Methode sein mag, die man zur Darstellung einer Fläche benutzt, so wird man in erster Linie ein Verfahren anzugeben haben, **die Tangentialebene** in einem beliebigen Punkte der Fläche zu konstruieren. Kennt man von der Fläche ein zweifaches System von Erzeugenden, derart daß durch jeden Punkt P je eine Erzeugende von jedem System hindurchgeht, so wird die allgemeine Methode darin bestehen, daß man die beiden Tangenten in P an die Erzeugenden konstruiert; diese bestimmen die gesuchte Ebene.

b) Eine zweite wichtige Aufgabe ist die, den **Schnitt einer Ebene mit der Fläche** zu konstruieren; hat man die Darstellung eines solchen Schnittes erhalten, so braucht man ihn nur in die Bildebene umzulegen, um die wahre Gestalt und Größe zu bestimmen. Ist diese Aufgabe aufgelöst, so ist man imstande, **die Treffpunkte** der Fläche **mit einer beliebigen Geraden** g zu bestimmen, weil sie die Punkte sind, die g gemeinsam hat mit einem (geneigten) durch jene Gerade gelegten ebenen Schnitt mit der Fläche. Dennoch wird es in manchen Fällen zweckmäßig sein, direkt das Problem der Treffpunkte einer Geraden zu behandeln.

c) Mit Rücksicht auf die Anwendungen in der Theorie der Schatten ist ferner von Wichtigkeit die Untersuchung der ∞^1 **Tangentialebenen,** die man **von einem** außerhalb, im Endlichen oder Unendlichen, gelegenen **Punkte** an die Fläche legen kann, und hierbei ist besonders wichtig die Bestimmung der Kurve, die der Ort der Berührungspunkte ist. Ist diese Konstruktion für zwei Punkte A und B ausgeführt, so werden sich die erhaltenen Kurven in einer bestimmten Zahl von Punkten schneiden, und diese sind dann die Berührungspunkte der Tangentialebenen, die durch die Gerade AB (die eventuell auch im Unendlichen liegen kann) an die Fläche gelegt werden können.

d) Die Aufsuchung der **Normalen von einer gegebenen Richtung** r läßt sich auf die der zu r senkrechten Tangentialebenen sogleich zurückführen, und ist wichtig, da die Fußpunkte jener Normalen die

---

dem Leser den *Traité de la géométrie déscriptive* von J. de la Gournerie., III. Tl., S. 191ff. der III. Aufl. (Paris, 1901).

sog. Glanzpunkte der von Strahlen jener Richtung beleuchteten Fläche sind.

e) Betrachtet man statt einer zwei Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, so ergibt sich zunächst die Fundamentalaufgabe, deren **gegenseitige Schnittkurve** zu finden. Der Kunstgriff, zu dem man gewöhnlich greift, ist der, daß man eine Folge von geeignet gewählten ∞^1 Hilfsflächen herbei zieht. Ist $\mathfrak{F}$ eine von diesen, so gehören die den $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ gemeinsamen Punkte der gesuchten Schnittkurve an und diese sind die Schnittpunkte der Kurven $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_2$; durch Variation von $\mathfrak{F}$ erhält man jene punktweise.

Benutzt man z. B. die Methode der kotierten Ebenen, und will die Schnittkurve der zwei topographischen Flächen $z = \varphi(x, y)$ und $z = \psi(x, y)$ finden, so benutzt man zweckmäßig als Hilfsfläche die Ebene $z = Const.$, alsdann sind die gemeinsamen Punkte der Kurven $\varphi(x, y) = c$, $\psi(x, y) = c$ die Projektionen jener Punkte der Schnittkurve, für die die Ordinate $z = c$ ist; durch Änderung von c erhält man weitere Punkte der Schnittkurve. Die Tangente an sie in einem seiner Punkte ergibt sich als Schnitt der Tangentialebenen in jenem Punkte an die beiden gegebenen Flächen.

f) Dual hierzu ist die **Aufsuchung der ∞^1 Ebenen, die beide Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ berühren.** Man lege von dem beliebigen Punkte O des Raumes an beide Flächen die Tangentialkegel; die Ebenen, die diese beiden Kegel berühren, gehören zu den gesuchten; durch Variation von O erhält man alle.

g) Sind schließlich drei Flächen $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ gegeben, und man will die **ihnen gemeinsamen Punkte finden**, so konstruiere man die Kurven $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_3$, deren Schnittpunkte sind die gesuchten. Auf diese Aufgabe läßt sich auch die **Auffindung der Schnitte einer Fläche $\mathfrak{F}_1$ mit einer Kurve Γ** zurückführen; es genügt durch Γ eine geeignet gewählte Hilfsfläche $\mathfrak{F}$ zu legen; als solche wählt man i. a. zweckmäßig einen der Zylinder oder Kegel, die Γ auf die Bildebene projizieren.

h) Die hierzu duale Aufgabe würde lauten: **Die Ebene zu bestimmen, die eine gegebene Fläche berührt und zugleich einer abwickelbaren Fläche angehört.**

i) **Um die Ebenen zu finden, die drei Flächen $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ zugleich berühren**, betrachte man die Tangentialebenen an $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ und die Kurve Γ_2, den Ort der Punkte, in denen jene die $\mathfrak{F}_1$ berühren, alsdann die Tangentialebenen an $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_3$ und die Kurve Γ_3, die der Ort der Berührungspunkte mit $\mathfrak{F}_1$ ist; in den Punkten, die Γ_2 und Γ_3 gemeinsam sind, wird $\mathfrak{F}_1$ von den gesuchten Ebenen berührt.

Zweites Kapitel.
Flächen zweiter Ordnung.

§ 1. Zusammenfassung der Haupteigenschaften der Flächen 2. O.

236. Wir gehen jetzt dazu über, die allgemeinen Darlegungen des vorigen Kapitels auf die Untersuchung und graphische Darstellung der bemerkenswertesten Arten besonders bekannter Flächen anzuwenden. Übergehend die Flächen der elementaren Geometrie, da sie als besondere Fälle allgemeinerer Flächen betrachtet werden können, beginnen wir mit den Flächen, die sich zuerst darbieten, den Flächen zweiter Ordnung.[1]) Wir setzen voraus, daß dem Leser die Grundzüge ihrer Theorie bekannt seien, und beschränken uns daher auf die Erwähnung wichtiger häufig benutzter Eigenschaften, indem wir ihren Zusammenhang mit der allgemeinen Theorie der algebraischen Flächen nachweisen.

In kartesischen Koordinaten ist eine reelle Fläche 2. O. immer darstellbar durch eine Gleichung von folgendem Bau:

$$f(x, y, z) = a_{00} + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z \\ 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = 0, \qquad (1)$$

wo die Koeffizienten $a_{ik} = a_{ki}$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$ reelle, aber im übrigen ganz beliebige Konstanten sind. Sie ist im allgemeinen durch neun Punkte bestimmt (Nr. 232); sie ist von der zweiten Klasse und daher auch durch neun ihrer Tangentialebenen bestimmt. In jedem Punkte hat die Fläche 2. O. eine bestimmte Tangentialebene, die die Fläche in einem Geradenpaar schneidet, das reell und getrennt, zusammenfallend oder imaginär ist; diese Geraden nehmen zugleich die Stelle der Haupttangenten ein. Eine leichte Rechnung zeigt, daß im vorliegenden Falle die Determinante $\varDelta$ (vgl. Nr. 225) lautet:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Da in diesem Ausdrucke die Koordinaten nicht mehr auftreten, so sind die Punkte einer Fläche 2. O. alle von derselben Art, also alle elliptisch, wenn $\varDelta < 0$, alle parabolisch, wenn $\varDelta = 0$, oder alle hyperbolisch, wenn $\varDelta > 0$; daher besitzt die Fläche keine parabolische Kurve. Die Flächen mit lauter elliptischen Punkten enthalten keine reellen Geraden; es sind das Ellipsoid (Spezialfall die Kugel), das zweischalige Hyperboloid und das elliptische Paraboloid. Dagegen

1) Die Engländer haben dafür das Wort *quadric,* woraus die Franzosen *quadrique* und die Italiener *quadrica* machten; die Deutschen entbehren einer so kurzen Bezeichnung, man müßte denn Quadrifläche sagen.

enthalten die Flächen 2. O. mit hyperbolischen Punkten zwei Folgen von je ∞^1 reellen Geraden: es sind das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid. Sie können durch die Schnittlinien entsprechender Ebenen zweier projektiver Ebenenbüschel erzeugt werden oder durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte ebensolcher Punktreihen, die Träger immer windschief vorausgesetzt; dann und nur dann, wenn diese Punktreihen ähnlich sind, ist die Fläche ein Paraboloid. Die Flächen 2. O. mit lauter parabolischen Punkten schließlich sind die Kegel und im speziellen die Zylinder. Im Falle $\Delta = 0$ besitzt die Fläche einen singulären Doppel-Punkt (vgl. Nr. 227), d. h. ist ein Kegel.

Die unendlich ferne Ebene schneidet, ebenso wie jede andere beliebige Ebene des Raumes, die Fläche 2. O. in einem Kegelschnitte, der von jedem beliebigen Punkte des Raumes, z. B. vom Koordinatenanfang in einem Kegel zweiten Grades projiziert wird. Wollen wir seine Gleichung aus der Flächengleichung (1) ableiten, so haben wir nur das in Nr. 232 dargelegte allgemeine Verfahren anzuwenden; wir erhalten

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}xz + 2a_{12}xy = 0. \qquad (3)$$

Je nachdem nun dieser Kegel reell ist und nicht entartet, in zwei Ebenen zerfällt, oder imaginär ist, ist auch der Schnitt der Fläche mit der unendlich fernen Ebene reell und eigentlich, in zwei Geraden zerfallend oder ganz imaginär. Im ersten Falle erstreckt sich die Fläche ins Unendliche und ist ein (ein- oder zweischaliges) Hyperboloid, ein Kegel oder ein Zylinder. Im zweiten Falle, der dadurch charakterisiert ist, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

ist die Fläche ein (elliptisches oder hyperbolisches) Paraboloid. Im dritten Falle, wenn der Kegel nur den Scheitelpunkt reell hat, ist die Fläche geschlossen, also im allgemeinen ein Ellipsoid.

237. Aus der Gl. (8) in Nr. 223 ergibt sich, daß die ∞^1 Tangenten und die ∞^1 Berührungsebenen, die von einem beliebigen Punkte O aus an eine Fläche 2. O. gelegt werden, einem Kegel zweiter Ordnung, und ihre Berührungspunkte einer Ebene ω angehören; diese heißt die Polarebene von O, während umgekehrt O der Pol von ω ist. Liegt O auf der Fläche, so geht ω in die Berührungsebene über. Durchläuft O eine Gerade r, so dreht sich ω um eine Gerade s, derart daß, wenn diese ein Punkt durchläuft, seine Polarebene beständig durch r geht. r und s heißen zufolge ihrer gegenseitigen Beziehung in bezug auf die Fläche 2. O. konjugierte Gerade. Schneidet s die Fläche in den Punkten M und N, dann sind Mr und Nr die Polarebenen zu

M und N, d. h. die zugehörigen Berührungsebenen. Dies zeigt uns, daß die Aufgabe: **die durch eine Gerade r gehenden Berührungsebenen einer Fläche 2. O. zu finden,** nicht verschieden ist von der: **die Punkte der Fläche zu finden, die auf ihrer konjugierten Geraden s liegen.**

Es gibt ∞^6 Quadrupel von Punkten, die in bezug auf eine Fläche 2. O. paarweise zueinander konjugiert sind; jedes von ihnen wird von den Ecken eines selbstkonjugierten Tetraeders gebildet, derart daß jede Ecke der Pol der Gegenfläche, und daß je zwei gegenüberliegende Kanten konjugiert sind. Ein beliebiger Punkt des Raumes ist die Ecke von ∞^3 selbstkonjugierten Tetraedern, und jede beliebige Ebene die Fläche von ∞^3 ebensolchen.

238. Die unendlich ferne Ebene hat, ebenso wie jede andere, in bezug auf eine Fläche 2. O. einen bestimmten Pol M. Wenn sie die Fläche nicht berührt, so gehört M dieser nicht an und liegt in endlicher Entfernung. Jede durch M gezogene Gerade schneidet die Fläche in zwei zu M symmetrischen Punkten, also ist M Symmetriezentrum der Fläche. Er ist der sogenannte Mittelpunkt der Fläche. M ist Ecke von ∞^3 selbstkonjugierten Tetraedern, von denen jedes drei Kanten im Endlichen hat, die ein Tripel konjugierter Durchmesser bilden. Im allgemeinen gibt es unter ihnen eines, das aus drei zueinander senkrechten Durchmessern besteht, und diese sind dann die Achsen der Fläche 2. O., ihre Endpunkte heißen die Scheitelpunkte, die Ebenen, die sie zu je zweien bestimmen, heißen die Hauptebenen, und die in diesen Ebenen gelegenen Kegelschnitte die Hauptschnitte der Fläche 2. O. — In dem eben ausgeschlossenen Falle, daß die unendlich ferne Ebene die Fläche berührt, gibt es kein Symmetriezentrum; die Paraboloide haben also keinen Mittelpunkt; als Durchmesser betrachtet man die ∞^1 Geraden, die durch den Berührungspunkt der unendlich fernen Ebene mit der Fläche gehen. Jeder Durchmesser ist konjugiert zu einer bestimmten Stellung, nur für einen einzigen Durchmesser, die Achse, ist diese senkrecht zu dem betreffenden Durchmesser. Durch die Achse gehen zwei Hauptebenen, die jede einen Hauptschnitt der Fläche enthalten.

Nehmen wir als Koordinatachsen die Achsen einer zentrischen Fläche 2. O., so nimmt die Gleichung der Fläche die Gestalt an:

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wo die A, B, C reelle Zahlen sind, die eine auf der Hand liegende geometrische Bedeutung haben. In gleicher Weise kann

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + 2z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

als die kanonische Form der Gleichung irgend eines Paraboloids angesehen werden.



Aus der Gl. (15) in Nr. 230, ergibt sich, daß die Isophotoiden einer Fläche zweiter Ordnung wiederum von der zweiten Ordnung sind, und daher sind die Isophoten im allgemeinen Kurven vierter Ordnung.

§ 2. Allgemeines über die Projektion einer Fläche 2. O.; die stereographische Projektion.

239. Wir wollen im folgenden mit $\mathfrak{F}$ eine allgemeine und reelle Fläche zweiter Ordnung bezeichnen, die also weder ein Kegel noch ein Zylinder ist, noch viel weniger ein Ebenenpaar. Mit C soll ein außerhalb derselben gelegener Punkt und mit π eine beliebige Ebene bezeichnet werden; jenen wollen wir als Projektionszentrum, diese als Bildebene nehmen. Der scheinbare Umriß von $\mathfrak{F}$ gesehen von C aus, wird dann ein Kegelschnitt $\varLambda$ sein, dessen Projektion auf π von C aus $\varLambda'$ sein möge. $\varLambda'$ teilt alsdann die Ebene π in zwei Gebiete: jeder Punkt des ersteren ist die Projektion zweier reeller Punkte von $\mathfrak{F}$, was sich auch kurz dadurch ausdrücken läßt, daß man sagt, die Projektion von $\mathfrak{F}$ bedeckt jenes Gebiet von π doppelt. Das zweite Gebiet dagegen enthält nur Projektionen von zwei konjugiert imaginären Punkten von $\mathfrak{F}$. Ist $\mathfrak{F}$ eine Fläche mit lauter elliptischen Punkten, so gehen durch jede Gerade des Raumes, die $\mathfrak{F}$ (in reellen Punkten) nicht trifft, also außerhalb der Fläche liegt, zwei reelle Berührungsebenen, dagegen durch jede schneidende Gerade keine einzige. Hieraus folgt: Wenn ein Projektionsstrahl g $\mathfrak{F}$ in zwei reellen Punkten trifft, und π in P', so geht durch P' keine reelle Tangente an $\varLambda'$, demnach liegt P' innerhalb von $\varLambda'$. Das Gegenteil tritt ein, wenn g außerhalb liegt. Folglich: **Die Projektion einer Fläche zweiter Ordnung, die keine Regelfläche ist** (z. B. einer Kugel) **von einem nicht auf ihr gelegenen Punkte aus auf eine beliebige Ebene bedeckt doppelt das Gebiet dieser Ebene, das innerhalb der Projektion des scheinbaren Umrisses liegt.**

Wenn hingegen $\mathfrak{F}$ eine Fläche mit hyperbolischen Punkten ist, so gehen durch jede schneidende Gerade zwei reelle Tangentialebenen; und folglich: **Die Projektion einer Regelfläche zweiten Grades von einem nicht auf ihr gelegenen Punkte auf eine beliebige Ebene bedeckt doppelt das Gebiet jener Ebene, das außerhalb der Projektion des scheinbares Umrisses liegt.**

Eine beliebige Ebene σ schneidet $\mathfrak{F}$, sei sie elliptisch oder hyperbolisch, in einem Kegelschnitte K, der mit $\varLambda$ zwei reelle oder konjugiert imaginäre Punkte P und Q gemein hat, nämlich die Schnitte von $\mathfrak{F}$ mit der Geraden s, in der sich die Ebenen jener beiden Kegelschnitte schneiden. Zufolge des in Nr. 229 bewiesenen Satzes ist die Projektion K' von K ein Kegelschnitt der $\varLambda'$ in P' und Q' berühren muß, d. i. in den Punkten in denen K' von s' geschnitten wird; **folglich projizieren sich die ∞^3 ebenen Schnitte einer Fläche zweiter**

Ordnung sämtlich in Kegelschnitte, die die entsprechende Projektion des scheinbaren Umrisses doppelt berühren. Die beiden Berührungspunkte können reell oder konjugiert imaginär sein; sie fallen zusammen, wenn die Ebene von K durch eine Tangente von $\varDelta$ geht.

Nehmen wir dagegen an, daß $\mathfrak{F}$ aus hyperbolischen Punkt bestehe, und daß σ eine Tangentialebene sei, so zerfällt K in zwei reelle Geraden g und d; ihre Projektionen g' und d' müssen einen $\varDelta'$ doppelt berührenden Kegelschnitt bilden, daher ist jede von ihnen Tangente an $\varDelta'$. Folglich: **Die Erzeugenden der Projektion einer geradlinigen Fläche zweiter Ordnung sind die Tangenten des scheinbaren Umrisses.** Durch jeden Punkt P' von π, der außerhalb $\varDelta'$ liegt, gehen zwei Tangenten an $\varDelta'$, in denen sich als Projektion zweimal zwei Geraden der Fläche überlagern, die den Strahl CP' treffen.

240. Wir wollen jetzt im Gegensatz zu der vorigen Nummer annehmen, daß das Projektionszentrum C auf der Fläche $\mathfrak{F}$ selbst liege. Dann trifft jeder projizierende Strahl im allgemeinen die Fläche außer in C nur in einem Punkte P, die Bildebene π aber in einem Punkte P', so daß zwischen den Punkten $\mathfrak{F}$ und π eine eindeutige Korrespondenz entsteht. Um deren ausgezeichnete Elemente zu bestimmen, wollen wir mit g und d diejenigen (reellen oder konjugiert imaginären) Erzeugenden der Fläche bezeichnen, die durch das Projektionszentrum C gehen, und mit D' und G' ihre Spurpunkte in π. Es ist nun klar, daß in G' (oder D') die Projektionen aller Punkte von g (bzw. d) zusammenfallen, daher entsprechen den Punkten G' (bezw. D') auf $\mathfrak{F}$ alle Punkte von g (bzw. d). Betrachten wir daher eine beliebige Erzeugende g_0 von $\mathfrak{F}$, die dem System der g angehört, so wird sie d treffen, und also geht ihre Projektion g_0' durch D'. Ebenso projizieren sich alle Erzeugenden des anderen Systems in Geraden, die durch g' gehen. Außerdem muß jeder ebene Schnitt der Fläche die Geraden g und d treffen; **demnach werden die ∞^3 ebenen Schnitte der Fläche durch ∞^3 Kegelschnitte dargestellt, die durch die (reellen oder konjugiert imaginären) Punkte G' und D' gehen.** Insbesondere werden die ∞^2 Schnitte, die von den Tangentialebenen herrühren, durch ∞^2 Paare von Geraden dargestellt, von denen die eine durch G', die andere durch D' geht. Die ∞^1 Geraden, die von C aus die unendlich nahen Punkte von $\mathfrak{F}$ projizieren, liegen in der Ebene gd, die $\mathfrak{F}$ in C berührt; dem Punkte C selber entsprechen daher in der Bildebene alle Punkte der Geraden $G'D'$.

In dem speziellen Falle, daß $\mathfrak{F}$ die als kugelförmig gedachte Erdoberfläche darstellt, C ein Pol und π die Ebene des Äquators ist, entsprechen ihren ∞^3 ebenen Schnitten die ebensovielen Kreise der Bildebene. Wir erhalten die wohlbekannte Methode der **stereographischen Projektion der Kugelfläche.** Aber auch, wenn $\mathfrak{F}$ eine beliebige Fläche

2. O. ist, und man die Bildebene, sowie das Projektionszentrum auf ihr beliebig wählt, hat man eine Darstellung, die man als **stereographische Projektion der Fläche zweiter Ordnung** bezeichnet.

§ 3. Darstellung einer Fläche 2. O. nach der Mongeschen Methode.

241. Will man eine zentrische Fläche 2. O. $\mathfrak{F}$ (z. B. ein Ellipsoid) auf eine besonders übersichtliche Weise nach der Mongeschen Methode darstellen, so wird man zweckmäßig die Grund-, Auf- und Seitenrißebene parallel zu den drei Hauptebenen von $\mathfrak{F}$ legen. O sei das Zentrum der Fläche, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 die Scheitelpunkte, und zwar wollen wir annehmen, daß die Achse $A_1 A_2$ parallel der Grundlinie a_{12} sei, $B_1 B_2$ senkrecht zur Aufrißebene, und $C_1 C_2$ senkrecht zur Grundebene. Im Falle des Ellipsoids sind dann alle diese Punkte reell; bei dem einschaligen Hyperboloid mögen $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ reell sein, und das zweischalige Hyperboloid möge so gelagert sein, daß $C_1 C_2$ reell ist. Analoge Annahmen wollen wir machen, wenn es sich um eine Fläche mit unendlich fernem Zentrum handelt.

Ist $\mathfrak{F}$ z. B. ein Ellipsoid (wie in Fig. 88, S. 172), so sind die in bezug auf das Zenit der Bildebenen scheinbaren Umrisse die drei Hauptschnitte A_1, A_2, A_3 und demnach ist A_1' die Ellipse mit den Achsen $A_1'A_2'$ und $B_1'B_2'$, A_2'' die mit den Achsen $A_1''A_2''$ und $C_1''C_2''$, A_3''' die mit den Achsen $B_1'''B_2'''$ und $C_1'''C_2'''$. C_1' und C_2' fallen mit O', $B_1''B_2''$ mit O'' und $A_1'''A_2'''$ mit O''' zusammen.[1])

Die Projektionen jedes ebenen Schnittes K_1 von $\mathfrak{F}$ werden Kegelschnitte K', K'', K''' sein, die A_1', A_2'', A_3''' doppelt berühren; die (eigentlichen oder uneigentlichen) Berührungssehnen sind die erste, zweite und dritte Projektion der Spurlinien der Ebene σ des Schnittes K mit den Ebenen der Hauptschnitte der Fläche. Da K' und A_1' einander doppelt berührende Kegelschnitte sind, so entsprechen sie sich in zweierlei Art in einer Homologie, die die Berührungssehne als Achse und zum Zentrum den Pol dieser Geraden in bezug auf beide Kurven hat; ähnliches gilt von K'' und A_2'', sowie von K''' und A_3'''.

In dem speziellen Falle, daß σ parallel zur Grundebene ist, geht die Achse dieser Homologie ins Unendliche, und K' und A_1' sind dann ähnlich und ähnlich gelegen mit dem Ähnlichkeitszentrum O'. K'' und K''' gehen dann über in (doppelt zu denkende) Sehnen von A_2'', A_3''. Ähnliches gilt, wenn σ parallel zur Auf- oder Seitenrißebene ist.

Nehmen wir hingegen an, daß σ durch eine der Achsen etwa $A_1 A_2$ gehe, dann ist die Homologieachse zwischen A_1' und K' die Ge-

---

1) Der Einfacheit der Darstellung wegen wollen wir annehmen, daß die Kurven A_1' und A_2'' vollständig gezeichnet vorliegen; es würde allerdings leicht sein, durch Anwendung der Kegelschnittheorie, sich von dieser Voraussetzung freizumachen.

rade $A_1'A_2'$, und das Zentrum der unendlich ferne Punkt von $B_1'B_2'$; demnach ist die Beziehung zwischen A' und K' eine orthogonale Affinität mit der Achse $A_1'A_2'$. Ähnlich wenn σ durch B_1B_2 oder C_1C_2 geht.

Es ist leicht einzusehen, daß alle diese Betrachtungen und Folgerungen sich leicht auf den Fall ausdehnen lassen, daß $\mathfrak{F}$ nicht ein Ellipsoid ist.

Wir wollen noch einige Bemerkungen über die Regelflächen zweiten Grades hinzufügen. Um eine bestimmte Vorstellung zu haben, nehmen wir etwa ein einschaliges Hyperboloid, dessen imaginäre Scheitelpunkte C_1 und C_2 seien; alsdann ist A_1' die Ellipse mit den Achsen $A_1'A_2'$ und $B_1'B_2'$, während A_2'' die Hyperbel mit der Fokalachse $A_1''A_2''$ ist und der imaginären Achse $C_1''C_2''$. Die Geraden der Fläche projizieren sich dann im Grundriß als Tangenten von A_1' und im Aufriß als Tangenten von A_2''. Die Erzeugenden des einen Systems wollen wir wie früher mit g, die des anderen mit d bezeichnen; alsdann ist jede Tangente r' von A_1' (oder A_2'') die Projektion zweier Erzeugenden der Fläche, deren zweite (oder erste) Projektion wir, wie folgt, bestimmen können. Es sei (s. die Fig. 87) r' eine Tangente von A_1', und τ die Vertikalebene, deren Horizontalspur mit r' zusammenfällt; τ schneidet dann den Hauptschnitt $A_1C_1A_2C_2$ in zwei Punkten G und D, deren erste Projektionen mit dem Punkte $(r', A_1'A_2')$ zusammenfallen, und deren zweite Projektionen die Schnitte von A_2'' mit den entsprechenden Ordinaten sind. Die Tangenten g'', d'' in G'', D'' an A_2'' sind die zweiten Projektionen der beiden Erzeugenden g und d von $\mathfrak{F}$, deren erste Projektionen mit r' zusammenfielen.

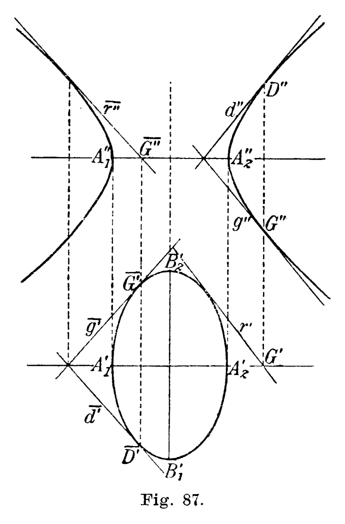


Fig. 87.

In ganz analoger Weise läßt sich die erste Projektion der beiden Erzeugenden $\bar{g}$, $\bar{d}$ konstruieren, deren zweite Projektion $\bar{r}''$ Tangente an A'' ist (s. für beide Fälle die Fig. 87). Es ist klar, daß das Ergebnis dieser Konstruktionen immer reell ist, wie man auch die Tangenten r', $\bar{r}''$ wählen mag.

Zur Übung. Ein hyperbolisches Paraboloid in der Mongeschen Methode darzustellen durch die einzelnen Erzeugenden für den Fall, daß die Fläche durch die Seiten eines windschiefen Vierecks gehe, von denen zwei in der Auf-, zwei in der Seitenrißebene liegen.

Anmerkung. Die Darstellung einer Fläche 2. O. nach der Methode der kotierten Ebenen läßt sich am bequemsten ausführen, wenn man eine der Hauptebenen als Grundebene wählt; das Nähere müssen wir dem Leser überlassen.

242. Es soll jetzt die obige Darstellung bei der Lösung einiger Aufgaben benutzt werden; um eine bestimmte Vorstellung zu erhalten, wollen wir annehmen, daß es sich um ein Ellipsoid (im speziellen eine Kugel) handele, dennoch haben unsere Angaben mutatis mutandis auch Gültigkeit für alle anderen Flächen 2. O.

Aufgabe I. Gegeben eine Projektion eines Punktes der Fläche: gesucht die andere und die zugehörige Berührungsebene.

Auflösung. Gegeben sei (Fig. 88) die Projektion P' innerhalb der Ellipse A_1' des Grundrisses des ersten scheinbaren Umrisses. Um P'' zu

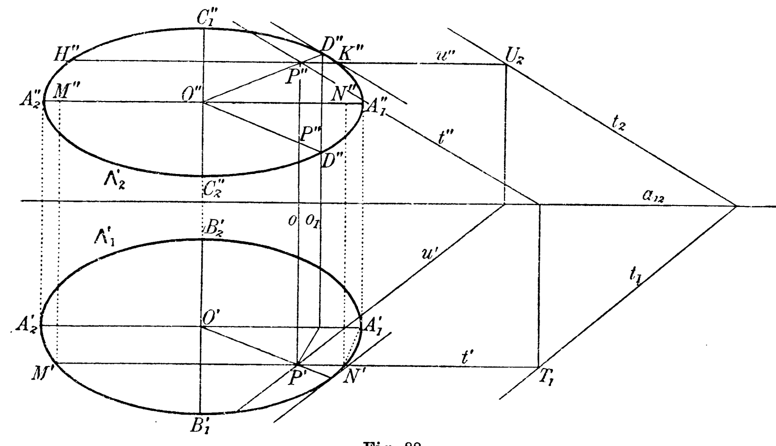


Fig. 88.

finden, legen wir durch P die zur Aufrißebene parallele Ebene, die aus der Fläche den Kegelschnitt Γ ausschneidet. Dieser projiziert sich im Grundriß als die durch P' parallel zur Achse gehende Sehne $M'N'$ der Ellipse A_1'. Die durch M' und N' gehenden Ordinaten schneiden $A_1''A_2''$ in M'' und N''. Γ'' ist demnach die mit A_2'' konzentrische und ähnlich gelegene Ellipse mit den Scheiteln M'', N'', kann also leicht gezeichnet werden. Ihre Schnitte mit der Ordinate o von P' sind die Projektion des (bzw. der) gesuchten Punkte.

Die Zeichnung der Ellipse Γ'' läßt sich jedoch vermeiden durch folgende Überlegung. Die Punkte, in denen die Ordinate o den Kegelschnitt Γ'' schneidet, entsprechen in der Homothetie zwischen Γ'' und A_2'' den Punkten, in denen A_2'' von o_1 geschnitten wird, welche Gerade der Geraden o als dem Kegelschnitte Γ'' angehörig, entspricht. Nun ist o_1 parallel zu o, und die Abstände der Geraden o_1 und o von O'' stehen zueinander in dem Verhältnisse $\frac{N''O''}{A_1''O''}$. Ziehen wir daher durch P' die Parallele zu A'_1N', so finden wir den Schnittpunkt von o_1 mit $A_1'A_2'$. Ziehen wir durch ihn die Parallele zu o, so ist diese o_1. Ist D'' einer der Schnittpunkte von o_1 mit A_2'', so wird der Schnitt von $O''D''$ mit o einer der gesuchten Punkte sein.

Die Tangente t in P an Γ projiziert sich im Grundriß auf die Gerade $M'N'$; t'' ist hingegen die durch P'' an Γ'' gezogene Tangente; wegen der Homothetie zwischen Γ'' und Δ_2'' ist t'' aber parallel zu der in D'' an Δ_2'' gezogenen Tangente; durch die Gerade $t \equiv (t', t'')$ geht aber die Berührungsebene in P an $\mathfrak{F}$. Um ihre Bestimmung zu vervollständigen, legen wir durch P noch einen Schnitt parallel zur Grundebene, der den Kegelschnitt Δ ausschneidet. Dieser projiziert sich im Aufriß in die Sehne $H''K''$ der Ellipse Δ_2'', die parallel zur Achse durch P'' läuft; Δ' hingegen ist eine durch P' gehende und mit Δ_1' konzentrische und ähnlich gelegene Ellipse. Demnach hat die Tangente u in P an Δ zum Aufriß die Gerade $H''K''$, als Grundriß die Parallele u', die durch P' zu der Tangente von Δ_1' gezogen ist, die durch den Endpunkt des Durchmessers $O'P'$ geht. Somit ist die Berührungsebene durch die beiden Geraden t, u bestimmt; sind T_1 und U_2 deren erster bzw. zweiter Spurpunkt, so sind die Parallelen durch T_1 zu u' und durch U_2 zu t'' die Spurlinien jener Ebene.

Zur Übung. Dieselbe Aufgabe zu lösen durch Benutzung der durch P und $B_1 B_2$ oder $C_1 C_2$ gehenden Schnitte (vgl. Nr. 241).

Spezialfälle. α) Handelt es sich um eine Kugel, so sind Δ_1' und Δ_2'' Kreise von gleichem Radius mit der Kugel, und Γ'' ist ein

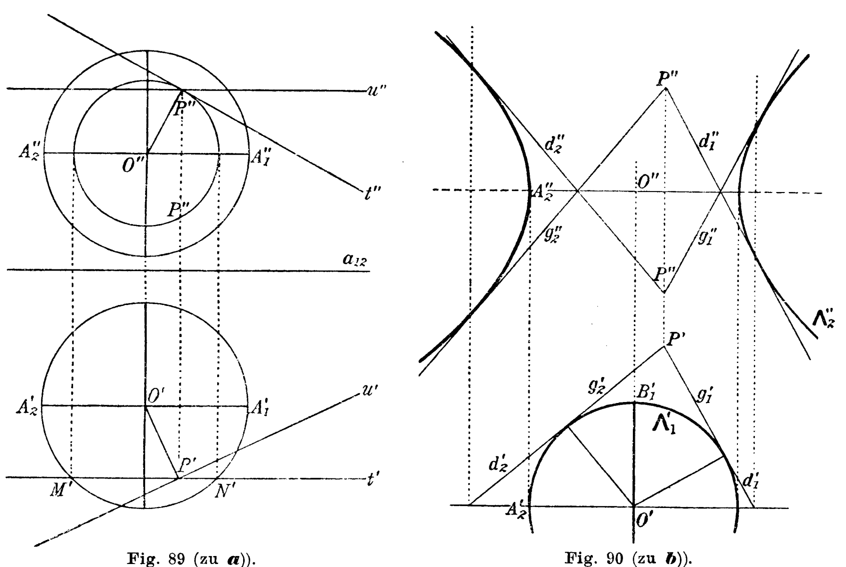


Fig. 89 (zu α)). Fig. 90 (zu b)).

Kreis um O'' mit dem Durchmesser $M'N'$ (s. Fig. 89). Ist dieser gezeichnet, so trifft die Ordinate von P' ihn in zwei Punkten, von denen jeder als die zweite Projektion P'' des gesuchten Punktes angesehen werden kann. Die Berührungsebene wird bestimmt durch die Gerade t, die zu Projektionen die Gerade $M'N'$ hat und die Senk-

rechte t'' durch P'' zu $O''P''$, sowie durch u, die zu Projektionen hat die Senkrechte zu $O'P'$ durch P' und die Parallele durch P'' zur Achse.

b) Handelt es sich um eine Regelfläche, z. B. ein einschaliges Hyperboloid, so läßt sich unsere Aufgabe in einfacher Weise

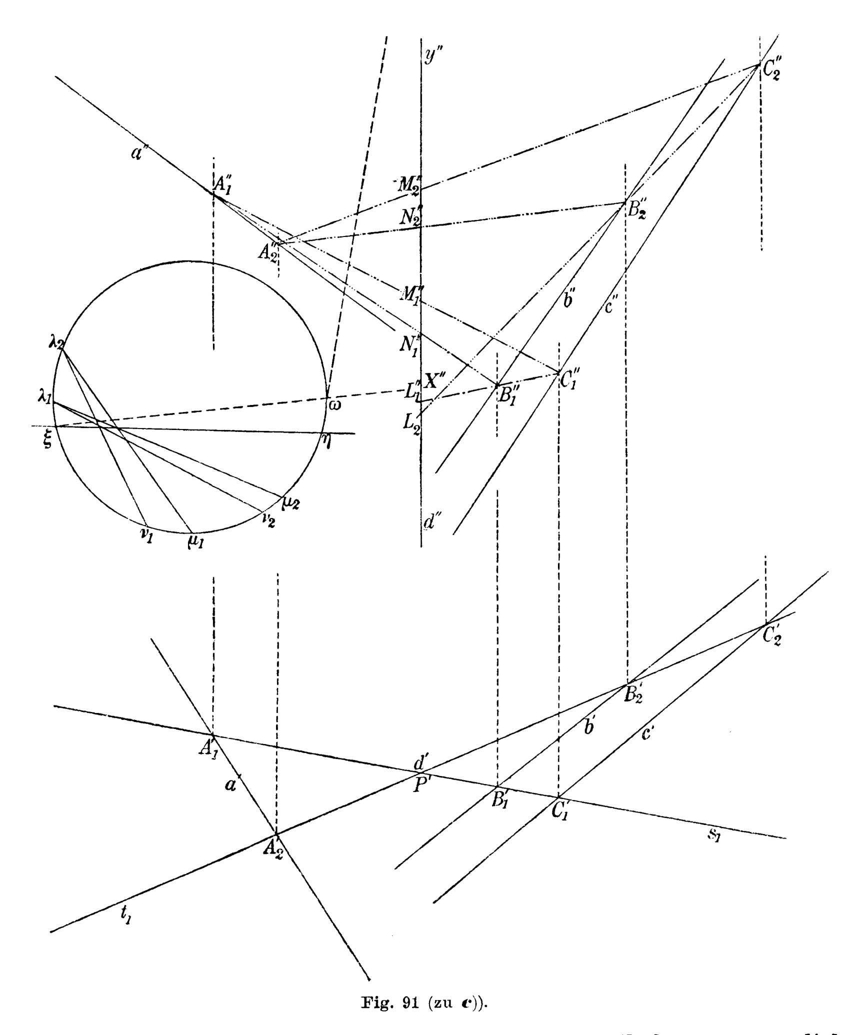


Fig. 91 (zu c)).

lösen, wenn man die Geraden der Fläche benutzt. Zieht man nämlich (s. Fig. 90) von P' aus an den Kegelschnitt A_1' die Tangenten, so überdecken sich in diesen die ersten Projektionen je zweier Erzeugenden, sagen wir g_1, d_1 in der einen, g_2, d_2 in der anderen Tangente. Demnach ist P etwa der Punkt $g_1 d_2$ oder $g_2 d_1$. Konstruieren wir uns nun die Geraden g_1'', g_2'', d_1'', d_2'', so können wir als P'', sowohl $g_1'' d_2''$,

als auch $g_2'' d_1''$ wählen. Zur Kontrolle beachte man, daß beide Punkte auf der Ordinate von P' liegen müssen.

c) Wenn aber die Fläche durch drei ihrer Erzeugenden a, b, c bestimmt ist, so kann man die Aufgabe als einen besonderen Fall derjenigen betrachten, die wir in Bd. I, S. 47—9 behandelt haben; als vierte Gerade d gilt nun diejenige Vertikale, die P' als Horizontalprojektion hat. Die so entstehende Konstruktion ist in Fig. 91 ausgeführt mittels der Ebenen, welche als erste Spuren die (beliebigen) Geraden s_1 und t_1 durch $P' \equiv d'$ haben.

243. Aufgabe II. Die Schnitte einer Geraden mit einer Fläche zweiter Ordnung zu finden.

Auflösung: Die Fläche sei wieder ein Ellipsoid $\mathfrak{F}$ in der früheren Weise dargestellt und $l \equiv (l', l'')$ sei die gegebene Gerade (s. Fig. 92).

Fig. 92.

Man beachte, daß die gesuchten Punkte die Doppelelemente der Involution sind, die gebildet wird von den Punkten der Geraden l, die in bezug auf $\mathfrak{F}$ zueinander konjugiert sind; also heißt es die Doppelpunkte dieser Involution zu finden: um die Aufgabe aufzulösen, genügt es, diese Involution in erster oder zweiter Projektion zu bestimmen. Zu diesem Zwecke betrachten wir den Punkt U, in welchem l die Ebene $A_1 B_1 A_2 B_2$ schneidet: es ist dann $U'' \equiv l'' \cdot A_1'' A_2''$, und U' der Punkt, in dem die entsprechende Ordinate l' trifft. Die Polarebene von U ist eine vertikale Ebene und hat als erste Spur die Polare u_1 von U' in bezug auf A_1'.[1])

1) Um die Wahrheit solcher Behauptung zu sehen, genügt es zu bemerken, daß die Polarebene ε des Punktes $P(x_0, y_0, z_0)$ in bezug auf die Fläche

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1$$

im allgemeinen die Gleichung hat

Der Punkt $l' \cdot u_1$ ist erste Projektion des Punktes $\overline{U}$ von l, der konjugiert zu U in bezug auf $\mathfrak{F}$ ist; die entsprechende Ordinate trifft l'' in $\overline{U}''$. Um ein anderes Paar der fraglichen Involution zu finden, betrachten wir geradeso den Punkt V, in dem l die Ebene $A_1 C_1 A_2 C_2$ trifft, so können wir ebenso den zu V in bezug auf $\mathfrak{F}$ konjugierten Punkt $\overline{V}$ finden. Die Doppelpunkte X', Y' der so durch die Paare $U'\overline{U}'$, $V'\overline{V}'$ bestimmten Involution sind die ersten Projektionen der gesuchten Punkte, die zweiten sind die Schnitte der zugehörigen Ordinaten mit l''. Um die Punkte X', Y' zu finden, beschreiben wir einen Kreis K, der l' berührt; wir ziehen die zweiten Tangenten desselben, die durch $U', \overline{U}'$ und $V', \overline{V}'$ gehen; sei U_0 der Durchschnittspunkt der ersteren, V_0 der des zweiten. Die Kreistangenten in den Punkten, in denen K von der Geraden $U_0 V_0$ geschnitten wird, treffen l' in den gesuchten Punkten.

Bemerkung. Wenn die Fläche geradlinig ist, so ist die vorige Aufgabe im Grunde nicht verschieden von der Untersuchung der Geraden die vier gegebene schneiden (vgl. Nr. 29). Dasselbe gilt in bezug auf die nächste Aufgabe.

Aufgabe III. Die durch eine gegebene Gerade gehenden Berührungsebenen einer Fläche zweiter Ordnung zu bestimmen.

Auflösung. Die Data seien dieselben, wie in der vorigen Aufgabe. Da jene zu der jetzigen Aufgabe dual ist, so können wir versuchen, sie auf einem zu dem vorigen dualen Wege zu lösen; wir werden jetzt zeigen, daß das möglich ist. Der Kürze halber wollen wir mit α, β, γ die drei Hauptebenen $B_1 C_1 B_2 C_2$, $C_1 A_1 C_2 A_2$, $A_1 B_1 A_2 B_2$ bezeichnen, und $\sigma \equiv [s_1, s_2]$, $\tau \equiv [t_1, t_2]$ seien die Ebenen, die die Gerade l auf die Grund- und Aufrißebene projizieren; es ist dann $s_1 \equiv l'$, $t_2 \equiv l''$, während s_2 und t_1 senkrecht zur Grundlinie a_{12} sind (s. die Fig. 93). Da σ senkrecht zum Hauptschnitt γ ist, so ist ihr Pol nicht verschieden von dem der Geraden $c \equiv \sigma\gamma$ in bezug auf diesen Hauptschnitt (s. die Fußnote auf dieser S.), und S' ist der Pol von $c' \equiv \sigma_1 \equiv l'$ in bezug auf

---

$$\frac{(x-\alpha)(x_0-\alpha)}{a^2} + \frac{(y-\beta)(y_0-\beta)}{b^2} + \frac{(z-\gamma)(z_0-\gamma)}{c^2} = 1;$$

wenn daher P in einer der Hauptebenen liegt, also z. B. $z_0 = \gamma$, so wird diese Gleichung zu

$$\frac{(x-\alpha)(x_0-\alpha)}{a^2} + \frac{(y-\beta)(y_0-\beta)}{b^2} = 1.$$

Alsdann ist ε die durch die Polare von P' in bezug auf diesen Hauptschnitt senkrecht zu dieser gelegte Ebene. Es möge noch bemerkt werden, daß, wenn P noch auf einer Achse liegt, also z. B. $y_0 = \beta$, $z_0 = \gamma$, so ist ε folgendermaßen dargestellt

$$\frac{(x-\alpha)(x_0-\alpha)}{a^2} = 1;$$

sie ist daher die durch den vierten harmonischen Punkt zu P und den Endpunkten der Achse gelegte senkrechte Ebene.

die Ellipse Λ_1', S'' ist der Schnitt der entsprechenden Ordinate mit $\Lambda_1''\Lambda_2''$. Der Punkt $S \equiv (S', S'')$ und die Gerade $l \equiv (l', l'')$ bestimmen die Ebene $\bar{\sigma} \equiv [\bar{s}_1, \bar{s}_2]$, die zu σ in bezug auf $\mathfrak{F}$ konjugiert ist. Wir wechseln nun die Rolle der beiden Projektionsebenen und gehen in ganz analoger Weise vor, indem wir den Pol T'' von l' in bezug auf Λ_1' bestimmen und konstruieren $\bar{\tau} \equiv [\bar{t}_1, \bar{t}_2]$, die zu τ in bezug auf $\mathfrak{F}$ konjugiert ist. Mit Hilfe eines Kreises, der durch den ersten Spurpunkt L_1 von l geht, suchen wir dann die Doppelelemente x_1, y_1 der durch die Paare $s_1\bar{s}_1$, $t_1\bar{t}_1$ bestimmten Involution; sie sind die ersten Spuren der gesuchten Ebenen. Die zweiten ergeben sich daraus, daß sie durch den zweiten Spurpunkt L_2 von l gehen müssen und daraus, daß die beiden Spuren einer Ebene sich auf der Grundlinie a_{12} schneiden müssen.

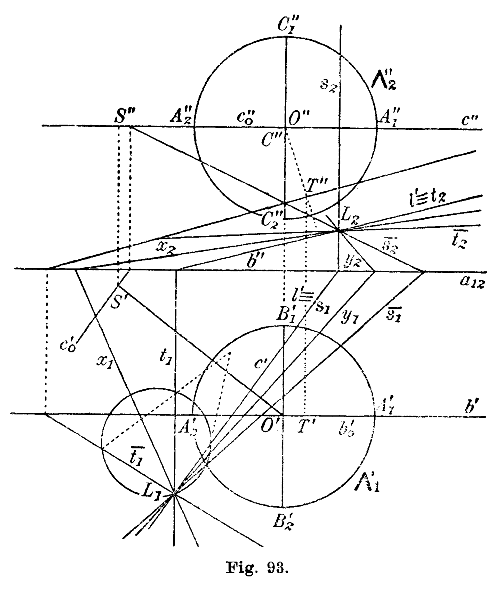


Fig. 93.

Zur Übung. **I.** Wie vereinfacht sich diese Konstruktion im Falle einer Kugel? **II.** Die gemeinsamen Berührungsebenen zweier Kugeln zu konstruieren (Man benutze die Ähnlichkeitsachsen der beiden Flächen).

244. Aufgabe IV. Den Schnitt einer Fläche 2. Ordnung mit einer Ebene zu konstruieren.

Auflösung. I. Methode. Die gegebene Ebene sei $\tau \equiv [t_1, t_2]$. Eine beliebige horizontale Ebene ω, etwa diejenige, die als zweite Spur die zur Achse parallele Gerade u_2 hat, schneidet τ in einer Geraden r, deren zweite Projektion r'' mit u_2 zusammenfällt, während r' leicht zu finden ist (s. Fig. 94). ω schneidet die $\mathfrak{F}$ in einer Ellipse Γ, deren zweite Projektion Γ'' mit der auf u_2 gelegenen Sehne $M''N''$ von Λ_2'' zusammenfällt, während Γ' konzentrisch und ähnlich gelegen zu Λ_1' ist und als

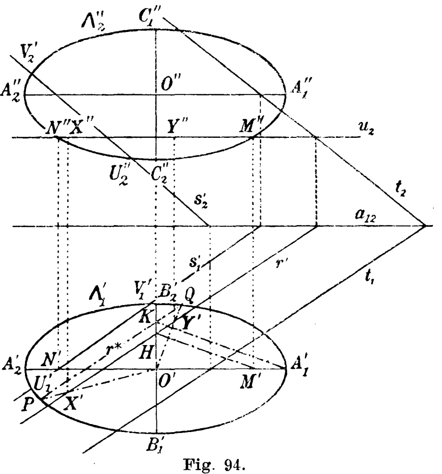


Fig. 94.

Achse die Strecke $M'N'$ hat. Die Schnitte von r' mit Γ' sind die ersten Projektionen zweier Punkte X, Y des gesuchten Schnittes. Um sie ohne vorherige Zeichnung der Kurve Γ' zu finden, beachte man, daß in der Homothetie zwischen Γ' und $\varDelta_1'$ die Punkte X', Y' den Punkten entsprechen, in denen $\varDelta_1'$ von der Geraden r^* getroffen wird, die der, als zu Γ' gehörend, gedachten Geraden r' entspricht. r^* ist aber parallel zu r' und hat von O' einen Abstand, der zu dem von r' in dem Verhältnisse $\frac{O'A_1'}{O'M'}$ steht. Um sie zu konstruieren, zeichne man den Punkt $H \equiv r' \cdot B_1'B_2'$ und verbinde H mit M'. Die durch A_1' zu HM' gezogene Parallele schneidet $B_1'B_2'$ in K und die durch K zu r' gezogene Parallele ist r^*. Schneidet letztere nun $\varDelta_1'$ in P und Q, so hat man noch $O'P$ und $O'Q$ zu ziehen, und diese schneiden r' in X' und Y'. Die entsprechenden Ordinaten treffen $r'' \equiv u_2$ in X'' und Y''. Variieren wir nun u_2, indem wir es parallel zu sich selbst verschieben, so erhalten wir neue Punktepaare X, Y und erzeugen so den gesuchten Schnitt. — Im speziellen können wir u_2 mit $A_1''A_2''$ zusammenfallen lassen, und wenn dann s_1 der Schnitt von τ mit der entsprechenden Lage der Hilfsebene ω ist, so fällt Γ' mit $\varDelta_1'$ zusammen und die Affinität geht in eine Identität über, weshalb die Punkte U_1', V_1', in denen s_1 $\varDelta_1'$ schneidet, der ersten Projektion der Schnittlinie Σ angehören, was auch aus dem Satze in Nr. 239 hervorgeht. Σ' berührt daher $\varDelta_1'$ in U_1', V_1'. Ähnlich findet man die Punkte U_2'', V_2'', in denen Σ'' $\varDelta_2''$ berührt.

Man beachte, daß durch die Punkte U_1', V_1' und das Paar X', Y' der Kegelschnitt Σ' schon überbestimmt ist, da er $\varDelta_1'$ in U_1' und V_1' berührt; dasselbe gilt von Σ'' in bezug auf $U_2''V_2''$ und X'', Y''.

Anmerkung. In dem Falle, daß es sich um eine Kugel handelt, ist diese Methode besonders bequem, da dann Γ sowohl wie sein Grundriß ein Kreis ist. Zur Übung möge der Leser die bezügliche Konstruktion durchführen.

II. Methode. Die Data seien dieselben wie vorhin. Als Hilfsflächen nehmen wir auch hier Ebenen, die zueinander parallel sind, jedoch nicht mehr zu den Fundamentalebenen, sondern ihre Stellung ergibt sich wie folgt. Wir beschreiben um O' mit OB_1' einen Kreis K' (s. die Fig. 95); er ist die Projektion zweier ebener Schnitte durch die Fläche, die zur Aufrißebene senkrecht stehen. Um diese zu bestimmen, zeichnen wir die Punkte M', M_1' in denen K' die Gerade $A_1'A_2'$ trifft. M' ist die Projektion zweier Punkte von $\mathfrak{F}$, die der Ellipse $A_1C_1A_2C_2$ angehören, deren zweite Projektionen wir erhalten, wenn wir die Ellipse $\varDelta_2''$ mit der Ordinate von M' schneiden; sie seien M'' und $\overline{M}''$. Ebenso seien M_1'', $\overline{M}_1''$ die Schnitte von $\varDelta_2''$ mit der Ordinate von M_1', wobei die Bezeichnungen so gewählt sein mögen, daß $M''M_1''$ und $\overline{M}''\overline{M}_1''$ Durchmesser von $\varDelta_2''$ werden (in der Figur

wurde nur der erstere gezeichnet). Die Strecken $M''M_1''$ und $\overline{M}''\overline{M}_1''$ stellen dann den Aufriß zweier ebener Schnitte K und $\overline{\mathrm{K}}$ mit $\mathfrak{F}$ dar, die K′ zum gemeinsamen Grundriß haben, während die Geraden $u_2 \equiv M''M_1''$ und $\overline{u} \equiv \overline{M}''M_1''$ die zweiten Spuren ihrer Ebenen sind. Hieraus ergeben sich leicht ihre ersten Spuren u_1 und $\overline{u}_1$, da sie ja senkreckt zur Achse a_{12} sind. Wir konstruieren nun die Schnittlinie r der beiden Ebenen $[t_1, t_2]$ und $[u_1, u_2]$; r' schneidet dann K′ in zwei Punkten X', Y', die zugehörigen Ordinaten $r'' \equiv u_2$ in X'', Y''. Dann sind offenbar X, Y Punkte der gesuchten Schnittkurve; zwei weitere $\overline{X}$, $\overline{Y}$ erhält man durch die Ebene $[\overline{u}_1, \overline{u}_2]$. Um beliebig viele weitere zu erhalten, nehme man eine zu $[u_1, u_2]$ parallele Ebene $[v_1, v_2]$, sie schneidet $\mathfrak{F}$ in einer Ellipse, deren Aufriß die auf v_2 liegende Sehne $N''N_1''$ von A_2'' ist, während ihr Grundriß ein Kreis mit dem Durchmesser $N'N_1'$ ist; er trifft die erste Projektion s' der Schnittlinie der Ebenen $[t_1, t_2]$, $[v_1, v_2]$ in zwei Punkten Z', W', deren Ordinaten $v_2 \equiv s''$ in Z'', W'' treffen. Z und W sind zwei neue Punkte des gesuchten Schnittes, und durch Variation von v_2 ergiebt sich dieser punktweise.

Fig. 95.

Anmerkung. Wenn die Fläche geradlinig ist, so kann die Aufgabe gelöst werden, indem man die Punkte sucht, in denen die gegebene Ebene die Erzeugenden der Fläche schneidet.

245. Aufgabe V. Von einem Punkte aus an eine Fläche zweiter Ordnung den Berührungskegel zu legen.

Auflösung. Die Fläche sei ein wie früher dargestelltes Ellipsoid, der Punkt sei $P \equiv (P', P'')$ (s. Fig. 96). Wir wollen zeigen, wie sich die Berührungskurve des gesuchten Kegels punktweise konstruieren läßt, indem man die in einer beliebigen horizontalen Ebene ω gelegenen Punkte dieser Kurve ermittelt.

Wir betrachten zu dem Zwecke, den der Fläche $\mathfrak{F}$ umschriebenen Kegel $\mathfrak{K}$, der sie längs der Kurve Γ berührt, in der $\mathfrak{F}$ von der Horizontalebene ω, deren Spur t_2 ist, geschnitten wird. Legen wir an den Kegel $\mathfrak{K}$ von P die Tangentialebenen, so werden die entsprechenden Berührungserzeugenden ω in den gesuchten Punkten treffen. Γ projiziert sich nun im Aufriß in die Sehne $H''H_1''$ von A_2'' auf t_2, und der zweite scheinbare Umriß jenes umschriebenen Kegels wird von den beiden

Geraden gebildet, die Δ_2'' in H'' und H_1'' berühren; der Schnitt dieser beiden Tangenten ist die zweite Projektion V'' des Scheitels dieses Kegels, während V' mit O' zusammenfällt. Wir bestimmen nun den Punkt J, in dem PV die Ebene ω der Kurve Δ trifft. J'' ist dann der Schnitt von $P''V''$ mit t_2, während J' der Schnitt der zugehörigen Ordinate mit $P'V'$ ist. Die Berührungspunkte der von J' an den Kegelschnitt Γ gezogenen Tangenten gehören offenbar der gesuchten Kurve an, daher sind X', Y' die Berührungspunkte der von J' an Γ' gezogenen Tangenten. Nun entsprechen sich aber Γ' und Δ_1' in einer Homothetie mit dem Zentrum O' und dem Ähnlichkeitsverhältnis $O'H_1' : O'\Delta_1'$; in dieser entsprechen also den Punkten X', Y' die Berührungspunkte Q, R der Tangenten an Δ_1' von jenem Punkte M, der dem J' in jener Homothetie entspricht (M erhält man nun, indem man durch Δ_1' die Parallele zu $H_1'J'$ zieht; sie schneidet eben $O'P'$ in M). Man hat also von M an Δ_1' die Tangenten zu ziehen, ihre Berührungspunkte Q, R mit O' zu verbinden, und durch J' zu ihnen die Parallelen zu ziehen. Diese sind Tangenten an Γ' und berühren ihn in X' und Y', den Schnitten mit $O'Q$ und $O'R$[1]). Die zugehörigen Ordinaten schneiden dann t_2 in $X_1''Y''$. X und Y selbst sind dann zwei Punkte der Berührungskurve; weitere erhalten wir durch Parallelverschiebung von t_2.

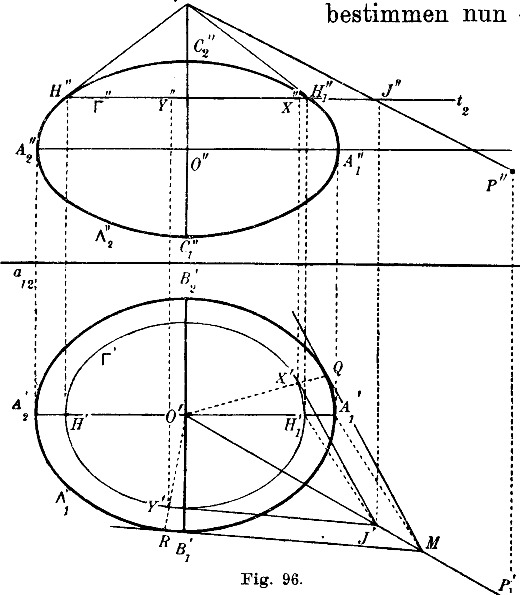


Fig. 96.

Anmerkungen: I. Obige Konstruktion bleibt im wesentlichen auch anwendbar, wenn P im Unendlichen liegt, in gegebener Richtung. **II.** Drei beliebig auf der erhaltenen Kurve gewählte Punkte liefern uns die Polarebene von P in bezug auf $\mathfrak{F}$. Jedoch ist dies Verfahren, die Polarebene eines Punktes P zu finden, i. a. wenig zweckmäßig und ganz unbrauchbar, wenn P innerhalb $\mathfrak{F}$ liegt; es soll daher ein anderes, nie versagendes dargelegt werden.

246. Aufgabe VI. Die Polarebene eines Punktes in bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung darzustellen.

1) Da QR und $X'Y'$ entsprechende Geraden in jener Homothetie sind, so müssen sie einander parallel werden.

Auflösung. Die Fläche sei ein wie bisher dargestelltes Ellipsoid, der Punkt sei $P \equiv (P', P'')$ [s. Fig. 97]. Legen wir durch P drei beliebige Ebenen λ, μ, ν und betrachten deren Pole L, M, N in bezug auf $\mathfrak{F}$, so bestimmen die letzteren die gesuchte Ebene. Um eine bequem ausführbare Konstruktion zu erhalten, hat man darauf zu sehen, diese Hilfsebenen in möglichst geeigneter Weise zu wählen. Zweckmäßig wählt man diejenigen durch P gehenden Ebenen, die parallel zu den Hauptebenen von $\mathfrak{F}$ laufen. Nehmen wir als Ebene λ die zur Achse $A_1 A_2$ senkrechte, und nennen deren Schnitt mit der Achse L_1, so ist der Pol von λ der vierte harmonische Punkt zu A_1, A_2, L_1. L_1', L_1'' sind die Schnitte von $A_1'A_2'$, $A_1''A_2''$ mit der Geraden $P'P''$, und daher L' und L'' die vierten harmonischen Punkte zu L_1', A_1', A_2' bzw. zu L_1'', A_1'', A_2''. Als Ebene μ nehmen wir ebenso die durch P zu $B_1 B_2$ senkrechte; schneidet sie diese Achse in M_1, so fällt M_1' in den Punkt, in dem $B_1'B_2'$ die durch P' zur Achse a_{12} gezogene Parallele trifft, und M_1'' in O''. Alsdann ist der Pol M von μ der vierte harmonische zu M_1, B_1, B_2; M'' fällt zusammen mit M_1'', und M' ist der vierte harmonische zu M_1', B_1', B_2'. Ist schließlich ν die durch P senkrecht zu $C_1 C_2$ gelegte Ebene, und N_1 der Punkt $\nu \cdot C_1 C_2$, so fällt N_1' auf O', N_1'' ist der Schnitt der durch P'' zu a_{12} gezogenen Parallelen mit $C_1'' C_2''$. Der Pol N von ν hat die Projektionen $N' \equiv O'$, und N'', welches der vierte harmonische zu N_1'', C_1'', C_2'' ist. Bestimmt man nun die Spurpunkte T_1, T_2, U_1, U_2, V_1, V_2 der Geraden LM, LN, MN, so erhält man mehr als notwendig, um die Spurlinien der gesuchten Ebenen zu bestimmen.

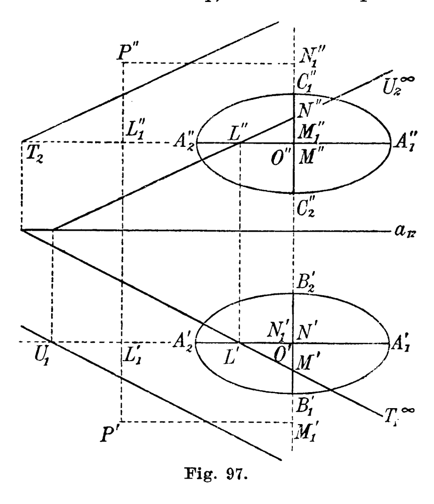


Fig. 97.

Aufgabe VII. Den Pol einer Ebene in bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung zu konstruieren.

Diese Aufgabe, die nicht nur die Umkehrung, sondern auch die duale zu der vorigen ist, läßt sich auf einem zu dem vorigen dualem Wege lösen. Die Fläche sei wieder ein wie früher dargestelltes Ellipsoid $\mathfrak{F}$ und $\tau \equiv [t_1, t_2]$ die gegebene Ebene. Nimmt man auf τ beliebig die Punkte L, M, N, bestimmt deren Polarebenen λ, μ, ν, so schneiden sich diese in dem gesuchten Pole; als solche drei Punkte nimmt man zweckmäßig die Schnittpunkte der drei Achsen von $\mathfrak{F}$ mit τ (s. Fig. 98). Den Schnittpunkt L mit der Achse $A_1 A_2$ findet man durch Anwendung des in Nr. 24 angegebenen Verfahrens, den Schnitt einer Ebene mit

einer zur Achse parallelen Geraden zu finden; den Schnitt M mit $B_1 B_2$ daraus, daß $M' \equiv O'$; den Punkt M daraus, daß $M'' \equiv O''$ wird. Sind nun L_1, N_1, M_1 die vierten harmonischen Punkte zu L, N, M und den Paaren $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2$, so sind die Polarebenen $[l_1, l_2]$, $[n_1, n_2]$, $[m_1, m_2]$ von L, N, M in bezug auf $\mathfrak{F}$, die durch L_1, N_1, M_1 parallel zur dritten, zweiten, ersten Bildebene gelegten Ebenen. Also fallen l_1, l_2 mit der Ordinate $L_1' L_1''$ zusammen; m_2 ist die zu a_{12} parallele Gerade durch M_1'', m_1 liegt im Unendlichen; n_2 liegt ebenfalls im Unendlichen, n_1 ist die durch N_1' zu a_{12} gezogene Parallele. Der diesen drei Ebenen gemeinsame Punkt P ist der gesuchte Pol, und es ist $P' \equiv l_1 n_1$, $P'' \equiv l_2 m_2$.

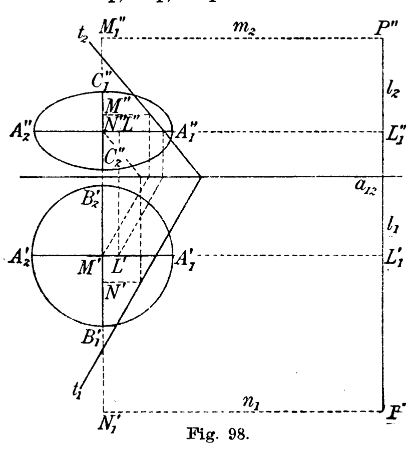


Fig. 98.

§ 4. Einiges über die Darstellung einer Fläche 2. O. in Zentralprojektion.

247. Die Darstellung der einzelnen Erzeugenden einer Regelfläche 2. O. in Zentralprojektion ist die unmittelbare Folge der Fundamentalaufgaben der Geometrie der Lage, wenn man sich die Fläche nach einer den von der projektiven Geometrie gelehrten oder auf diese zurückführbaren Methoden erzeugt denkt, d. h. also durch projektive Ebenenbüschel oder Punktreihen.

Zur Übung. In Zentralprojektion die einzelnen Erzeugenden der Fläche darzustellen, die der Ort der Orthogonalprojektionen einer gegebenen Geraden auf die Ebenen eines Büschels ist.

Um alle Fälle der Darstellung einer Fläche 2. O. kurz zu behandeln, mögen folgende Bemerkungen dienen. Die Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} - 1\right)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

stellt in kartesischen, im allgemeinen schiefwinkligen, Koordinaten eine Fläche zweiter Ordnung dar, für welche die Ebenen

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \qquad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

ein selbstkonjugiertes Tetraeder bilden. Wenn wir in Gl. (1) die Konstanten a, b, c, p, q, r festhalten und λ variieren lassen, so erhalten wir ∞^1 Flächen 2. O., die alle durch den Kegelschnitt

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0, \qquad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

hindurchgehen und dem Kegel einbeschrieben sind, der jenen Kegel-

schnitt vom Koordinatenanfang aus projiziert. Wird nun einer dieser Flächen die Bedingung auferlegt, durch einen gegebenen Punkt zu gehen, so ist dadurch der entsprechende Wert von λ bestimmt und damit auch die Fläche. Also:

Es gibt nur eine bestimmte Fläche zweiter Ordnung, die durch einen gegebenen Kegelschnitt und einen Punkt außerhalb dessen Ebene geht und einem Kegel durch jenen Kegelschnitt mit gegebener Spitze einbeschrieben ist.

Aus diesem Satze folgt, daß man bei der Bestimmung eine Fläche 2. O. $\mathfrak{F}$ in Zentralprojektion, den Kegelschnitt, der den scheinbaren Umriß vom Zentrum C aus gesehen bildet, nehmen kann als

$$\Gamma \equiv (ti', \Gamma')$$

und außerdem einen beliebigen ihrer Punkte

$$A \equiv (TI', A').$$

Um diese Bestimmung in der einfachsten Weise zu bewerkstelligen, nehmen wir als Bildebene die Ebene von Γ; wir geben also in der Bildebene einen Kegelschnitt, der zugleich die Spur von $\mathfrak{F}$ in der Bildebene als auch den scheinbaren Umriß gesehen vom Zentrum C aus darstellt. Aus den allgemeinen Darlegungen in Nr. 239 ergibt sich: Liegt der Punkt A' außerhalb Γ, so ist $\mathfrak{F}$ eine Regelfläche, und seine Erzeugenden projizieren sich als Tangenten von Γ; liegt A' innerhalb, so hat $\mathfrak{F}$ nur elliptische Punkte. Ein beliebiger Punkt M' der Bildebene, der sich in bezug auf Γ in derselben Lage wie A' befindet (also auch außerhalb oder innerhalb, wie A') ist die Projektion zweier reeller Punkte von $\mathfrak{F}$. Um diese vollständig darzustellen, sollen zwei Verfahren angegeben werden, das erste für den Fall, daß $\mathfrak{F}$ eine Regelfläche ist, das andere, wenn dies nicht zutrifft.

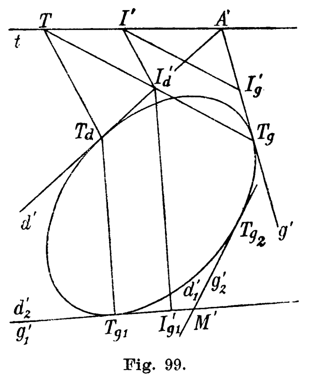


Fig. 99.

I. Fall (Fig. 99). Die Punkte A' und M' liegen außerhalb von Γ', so daß $\mathfrak{F}$ aus lauter hyperbolischen Punkten besteht. Die durch A' gehenden Erzeugenden projizieren sich in die von A' an Γ' gehenden Tangenten d', g'; ihre Spurpunkte sind offenbar die zugehörigen Berührungspunkte T_d, T_g, und ihre Fluchtpunkte ergeben sich daraus, daß beide Geraden, die gegebene Gerade TI' treffen. Es seien nun M_1 und M_2 diejenigen beiden Punkte von $\mathfrak{F}$, die sich in M' projizieren, d_1, g_1 die durch M_1, d_2, g_2 die durch M_2 gehenden Erzeugenden. Die Projektionen g_1' und d_2' fallen dann auf die eine, d_1' und g_2' auf die andere der beiden von M' an Γ' gelegten Tangenten; demnach fallen in den Berührungspunkt der ersteren die Spurpunkte T_{g1} und

T_{d2} von g_1 und d_2, in den anderen T_{d1} und T_{g2} zusammen. Der Fluchtpunkt I_{g1}' von g_1 ergibt sich daraus, daß diese Gerade d trifft. Alsdann wird einer der Punkte M_1, M_2 dargestellt durch $(T_{g1} I_{g1}', M')$ und ähnlich der andere. Auch ist klar, daß man dadurch für jeden der beiden Punkte zwei Darstellungen erhält.

Die Tangentialebenen in M_1 und M_2 sind bzw. $g_1 d_1$ und $g_2 d_2$, es ist also leicht, deren Darstellungselemente zu bestimmen.

II. Fall. A' und M' mögen innerhalb Γ' liegen, so daß also $\mathfrak{F}$ eine Fläche 2. O. mit elliptischen Punkten ist (vgl. die Fig. 100). Die Gerade $A'M'$ ist die Spurlinie t einer projizierenden Ebene, die $\mathfrak{F}$ in einem Kegelschnitt Δ schneidet, dessen Schnitte mit dem Projektionsstrahl CM' sind die gesuchten Punkte. Um sie zu finden, suchen wir zunächst ihre Umlegungen, und legen daher die projizierende Ebene Ct in die Bildebene um; alsdann sind (M_1) und (M_2) die Schnitte von $(C)M'$ mit (Δ). Nun lassen sich (C) und (A) nach einem bekannten Verfahren (s. Nr. 77) auffinden. Man kann einige Linien ersparen, wenn man um (A) zu finden, wie folgt verfährt: Die Gerade $(C)T$ schneide t in U; die Parallele von I' zu $(C)T$ schneide t in J'. A kann dann wie folgt dargestellt werden. Das übliche Verfahren lehrt, daß (A) nichts anderes als der Durchschnitt der Geraden $(C)A'$ und $I'J'$ ist. Um (Δ) zu finden, beachte man, daß die Schnittpunkte Q und R der Geraden t mit Γ' ihm angehören, und daß (Δ) die Geraden $(C)R$ und $(C)Q$ in Q und R berühren und durch (A) gehen muß. Hierdurch ist (Δ) hinreichend bestimmt. Die projektive Geometrie lehrt, wie seine Schnitte mit der Geraden $(C)M'$ sich konstruieren lassen, ohne daß man nötig hätte, den Kegelschnitt (Δ) vollständig zu zeichnen; sie sind die gesuchten Punkte (M_1) und (M_2).

Fig. 100.

Zieht man alsdann die Gerade (p_1) beliebig durch (M_1) und durch (C) die Parallele zu (p_1), so schneiden diese Geraden t in zwei Punkten I_1' und T_1, die die Darstellungselemente von M_1 sind, also kann man schreiben $M \equiv (T_1 I_1', M')$. In ähnlicher Weise läßt sich M_2 individualisieren.

Diese Betrachtungen mögen hinreichen, um eine Idee zu geben, in welcher Weise die Zentralprojektion auf die Theorie der Flächen zweiter Ordnung angewendet werden kann; der Leser möge versuchen, nach dieser Methode auch die in Nr. 243 ff. angeführten Aufgaben zu lösen.

§ 5. Grundeigenschaften der Schnittkurven zweier Flächen 2. O.

248. Sind zwei Flächen 2. O. $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ gegeben, so bieten sich zunächst die zwei zueinander dualen Aufgaben dar:

I. Den Ort Γ der ∞^1 ihnen gemeinsamen Punkte zu finden.

II. Die ∞^1 gemeinsamen Berührungsebenen zu bestimmen.

Um sie zu lösen, wird es im allgemeinen das Beste sein, die in Nr. 235 dargelegten allgemeinen Bemerkungen gehörig anzuwenden. Will man jedoch vom Standpunkt der Darstellung die Kurve Γ untersuchen, so wird man zweckmäßig zu folgenden Überlegungen greifen. Es seien

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) &\equiv a_{00} + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + \cdots + 2a_{12}xy = 0 \\ g(x, y, z) &\equiv b_{00} + b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + \cdots + 2b_{12}xy = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (1)$$

die kartesischen Gleichungen von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$. Da nun in den Punkten von Γ, sowohl $f(x, y, z)$, als $g(x, y, z)$ Null ist, so ergibt sich, daß in denselben Punkten, welchen Wert der Parameter λ auch haben möge, auch

$$f(x, y, z) + \lambda \cdot g(x, y, z) = 0.$$

Folglich gehen durch die Schnittkurve Γ von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ einfach unendlich viele (∞^1) solcher Flächen, die ein Büschel bilden, wovon Γ die Grundkurve ist. Befinden sich unter diesen auch Kegel? — Um diese Frage zu beantworten, beachten wir Folgendes. Soll die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) + \lambda \cdot g(x, y, z) \equiv (a_{00} + \lambda b_{00}) \\ + (a_{11} + \lambda b_{11})x^2 + \cdots 2(a_{12} + \lambda b_{12})xy = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

einen Kegel darstellen, so ist (Nr. 236) notwendig und hinreichend dafür, daß

$$\begin{vmatrix} a_{00} + \lambda b_{00} & \cdots\cdots & a_{03} + \lambda b_{03} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{30} + \lambda b_{30} & \cdots\cdots & a_{33} + \lambda b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Es genügt also, die Konstante λ so zu wählen, daß dieser Gleichung Genüge geleistet wird, damit man einen durch Γ hindurchgehenden Kegel erhalte. Nun ist diese Gleichung in λ vom vierten Grade, hat also vier Wurzeln und das heißt: **Durch die Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung gehen im allgemeinen vier Kegel zweiter Ordnung.** Dieser wichtige Satz von Poncelet erleichtert also die Untersuchung der Schnittlinie zweier Flächen 2. O., indem man annehmen darf, daß diese Kegel seien; insbesondere kann man zur Darstellung dieser Kurven, die im folgenden Kapitel angegebene allgemeine Methode der Auffindung des Schnittes zweier Kegel zur Anwendung bringen.

Zur Übung. Welcher Satz entspricht nach dem Dualitätsprinzip dem Ponceletschen?

Unsere Betrachtungen ermöglichen auch, eine sehr wichtige graphische Eigenschaft der fraglichen Kurven darzutun. Aus der Gleichung (2) des Büschels folgt leicht, daß durch jeden Punkt P des Raumes i. a. eine solche Fläche geht. Sind (x_0, y_0, z_0) die Koordinaten des Punktes P, so ist die Gleichung der fraglichen Fläche:

$$\begin{vmatrix} f(x, y, z) & g(x, y, z) \\ f(x_0, y_0, z_0) & g(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Insbesondere, nehmen wir einen Punkt C als Projektionszentrum und eine Ebene π als Bildebene, so geht auch durch C eine Fläche $\mathfrak{F}$ des Büchels; g und h seien ihre durch C gehenden Erzeugenden. Da nun Γ als Schnitt von $\mathfrak{F}$ mit einer zweiten Fläche $\mathfrak{G}$ des Systems (2) angesehen werden kann, so schneidet jede der Geraden g und h die Γ in zwei Punkten, sie sind also Sehnen von Γ. Die Spurpunkte von g und h in π sind daher (vgl. Nr. 198) Doppelpunkte von Γ', der Projektion von Γ. Folglich: **Die Projektion der Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung von einem beliebigem Punkte auf eine beliebige Ebene ist eine Kurve vierter Ordnung mit zwei reellen oder konjugiert imaginären Doppelpunkten.**

Zur Übung. Die Dürersche Muschellinie (s. Nr. 188 VI) kann als Orthogonalprojektion des Schnittes zweier Flächen zweiter Ordnung aufgefaßt werden; dieselben zu charakterisieren.

249. Die Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung ist i. a. eine algebraische Kurve vierter Ordnung; sie bietet einen bemerkenswerten Spezialfall dar, wenn die beiden Flächen eine erzeugende Gerade g gemeinsam haben. In diesem Falle besteht die Kurve aus der Geraden g und einer anderen Kurve Γ die, da sie mit g zusammen eine Kurve vierter Ordnung geben muß, von der dritten Ordnung ist. Sie heißt gewöhnlich kubische Raumkurve. Die Gleichungen der Geraden g mögen sein

$$a_0 x + b_0 y + c_0 z + d_0 = 0, \qquad a_0' x + b_0' y + c_0' z + d_0' = 0; \qquad (1)$$

dann lassen sich die der beiden Flächen in folgender Form schreiben

$$\left.\begin{aligned} &(a_0 x + b_0 y + c_0 z + d)(a_1' x + b_1' y + c_1' z + d_1') \\ &- (a_0' x + b_0' y + c_0' z + d_0')(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) = 0, \\ &(a_0 x + b_0 y + c_0 z + d)(a_2' x + b_2' y + c_2' z + d_2') \\ &- (a_0' x + b_0' y + c_0' z + d_0')(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Hieraus folgt, daß für die Punkte der Schnittkurve der beiden Flächen außerhalb g die Beziehung besteht

$$\frac{a_0 x + b_0 y + c_0 z + d_0}{a_0' x + b_0' y + c_0' z + d_0'} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{a_1' x + b_1' y + c_1' z + d_1'} = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{a_2' x + b_2' y + c_2' z + d_2'}. \qquad (3)$$



Bezeichnen wir nun mit t den gemeinsamen Wert dieser drei Quotienten, so erhalten wir die drei Gleichungen

$$(a_i x + b_i y + c_i z + d_i) - t(a_i' x + b_i' y + c_i' z + d_i') = 0 \quad (i = 0, 1, 2). \quad (4)$$

Nun stellen diese Gleichungen, wenn man t variiert, drei zueinander projektive Ebenenbüschel dar; folglich haben wir den Satz: **Eine kubische Raumkurve kann erzeugt werden als Ort der Schnittpunkte der Tripel entsprechender Ebenen dreier projektiver Ebenenbüschel.**

Lösen wir Gl. (4) bzw. nach x, y, z auf, so erhalten wir Ausdrücke dieser Größen als Funktionen von t folgender Art

$$x = \frac{\xi(t)}{\omega(t)}, \quad y = \frac{\eta(t)}{\omega(t)}, \quad z = \frac{\zeta(t)}{\omega(t)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wo ξ, η, ζ, ω rationale Funktionen dritten Grades von t sind. Die Punkte, in denen jene Kurve die Ebene

$$ax + by + cz + d = 0$$

schneidet, entsprechen den Werten von t, die die Wurzeln der Gleichung sind:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_0 - ta_0' & b_0 - tb_0' & c_0 - tc_0' & d_0 - td_0' \\ a_1 - ta_1' & b_1 - tb_1' & c_1 - tc_1' & d_1 - td_1' \\ a_2 - ta_2' & b_2 - tb_2' & c_2 - tc_2' & d_2 - td_2' \end{vmatrix} = 0. \quad . \quad . \quad (6)$$

Da diese vom dritten Grade in t ist, so gibt es drei solcher Punkte, und dies bestätigt, daß die fragliche Kurve dritter Ordnung ist.

Von einem beliebigen ihrer Punkte wird die kubische Raumkurve durch einen Kegel zweiter Ordnung projiziert; daher gehen durch die Kurve ∞^1 Quadrigekel; je zwei derselben schneiden sich außer in der Kurve, in der Verbindungslinie ihrer Scheitel.

Eine kubische Raumkurve ist durch sechs ihrer Punkte bestimmt, P, Q, A, B, C, D. Nämlich die beiden Quintupel von Geraden

$$P(Q, A, B, C, D) \quad \text{und} \quad Q(P, A, B, C, D)$$

bestimmen jedes einen Kegel zweiter Ordnung, und diese beiden schneiden sich außer in der Geraden $PQ \equiv g$ noch in einer kubischen Raumkurve, die durch die gegebenen Punkte geht.

Jede durch g gelegte Ebene σ schneidet beide Flächen noch in einer zweiten Erzeugenden, es seien diese d_1 und d_2; der Punkt, in welchem d_1 und d_2 sich schneiden, ist der einzige Punkt außerhalb g, den die kubische Kaumkurve mit der Ebene σ gemeinsam hat; die beiden anderen gehören der g an; **folglich ist g eine Sehne der Kurve Γ.**

Die Kurve Γ und die Gerade g bilden den vollständigen Schnitt der beiden Flächen; zufolge eines vorherigen Satzes gehen nun durch



einen beliebigen Punkt C des Raumes zwei Geraden p und q, die beide die (aus g und Γ gebildete) Schnittkurve in zwei Punkten treffen. Diese Geraden können nicht beide Sehnen von Γ sein, denn dann würde ja die Ebene pq Γ in **vier** Punkten treffen; keine von ihnen kann auch g in zwei Punkten treffen, daher muß die eine eine Sehne von Γ sein, während die andere sowohl Γ als g in je einem Punkte trifft. Fassen wir dies zusammen, so können wir sagen: **Durch jeden Punkt des Raumes geht eine Sehne einer kubischen Raumkurve**; und ferner (Nr. 198): **Die Projektion einer kubischen Raumkurve von einem beliebigen Punkte aus auf eine beliebige Ebene ist eine Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte.**

250. Die unendlich ferne Ebene schneidet, wie jede beliebige Ebene des Raumes, die kubische Raumkurve in drei Punkten. Sind diese reell und verschieden, so heißt sie **kubische Hyperbel**; ist nur einer reell und die beiden anderen konjugiert imaginär, so heißt sie **kubische Ellipse.** Wenn die unendlich ferne Ebene die Kurve in einem Punkte berührt, in einem anderen schneidet, so haben wir eine **hyperbolisch-parabolische kubische Raumkurve**, und wenn schließlich jene Ebene sie oskuliert, so heißt sie **parabolische kubische Raumkurve.** Um zu entscheiden, welcher Art eine durch Gl. (3) dargestellte Kurve angehört, ist notwendig und hinreichend, die Funktion $\omega(t)$ der Gleichungen (5) oder folgende Gleichung zu diskutieren, die entsteht, wenn man in Gl. (6) die Koeffizienten a, b, c gegen Null konvergieren läßt

$$\begin{vmatrix} a_0 - ta_0' & b_0 - ta_0' & c_0 - tc_0' \\ a_1 - ta_1' & b_1 - ta_1' & c_1 - tc_1' \\ a_2 - ta_2' & b_2 - ta_2' & c_2 - tc_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Zur Übung. I. Nach der Mongeschen Methode oder in Zentralprojektion eine kubische Raumkurve zu konstruieren und darzustellen als erzeugt durch drei projektive Ebenenbüschel. **II.** Die Ebenen, die entsprechende Punkte dreier projektiver Punktreihen auf windschiefen Trägern verbinden, sind Schmiegungsebenen einer kubischen Raumkurve.

Schlußbemerkung. Die Schnittlinie zweier Flächen 2. O. bietet noch einen anderen wegen der Häufigkeit des Vorkommens bemerkenswerten Spezialfall dar; er wird dargelegt durch folgenden

Satz: Berühren sich zwei Flächen zweiter Ordnung in zwei Punkten A und B, so schneiden sie sich in zwei Kegelschnitten.

Ist nämlich P ein beliebiger Punkt der Schnittlinie, so schneidet die Ebene PAB die beiden Flächen in zwei Kegelschnitten, die aber, weil sie drei Punkte und die Tangenten in zweien gemeinsam haben, zusammenfallen müssen. Nehmen wir ebenso einen anderen, beiden Flächen gemeinsamen Punkt Q, der aber nicht dem eben erhaltenen Kegelschnitte angehört, so gelangen wir zu einem zweiten, den beiden Flächen gemeinsamen Kegelschnitte.

Drittes Kapitel.

Kegel- und Zylinderflächen.

§ 1. Allgemeine Eigenschaften.

251. Die zweite Kategorie spezieller Flächen, die wir jetzt untersuchen wollen, umfaßt Gebilde, die der Leser, wenigstens in einigen Spezialfällen von der elementaren Geometrie her kennt, nämlich die Kegelflächen und deren Sonderfall, die Zylinderflächen.

Eine Kegelfläche entsteht, wenn man von einem festen Punkte die sämtlichen Punkte einer ebenen oder doppelt gekrümmten Kurve Γ projiziert; jener feste Punkt heißt der Scheitel, die Spitze oder das Zentrum der Fläche, Γ heißt die Leitlinie oder Direktrix, und die projizierenden Strahlen sind die Erzeugenden. Als Leitlinie einer Kegelfläche kann man offenbar auch jede andere auf ihr gezeichnete Kurve nehmen, wofern sie nur von allen Erzeugenden getroffen wird; insbesondere kann man als solche auch einen beliebigen ebenen Schnitt der Fläche nehmen und dann trägt jener den Namen Basis. Aus der Definition ergibt sich, daß man eine Gruppe von Erzeugenden erhält, wenn man die Fläche mit einer durch den Scheitel V gehenden Ebene ϵ schneidet; es sind dies jene Erzeugenden, die V mit den Schnittpunkten von ϵ und Γ verbinden. Eine Kegelfläche erstrekt sich zu beiden Seiten des Scheitels ins Unendliche; in der Praxis beschränkt man sich auf die Betrachtung des zwischen dem Scheitel und der Basis belegenen Teiles und nennt den so begrenzten Teil einen Kegel.

Aus der Definition der Kegelfläche ergibt sich, daß zwei durch beliebige Ebenen π_1 und π_2 auf ihr erzeugte Schnitte zueinander perspektiv sind, mit dem Scheitel als Zentrum, der Schnittlinie $\pi_1\pi_2$ als Achse der Perspektivität; insbesondere sind die durch ein System paralleler Ebenen erzeugten Schnitte einander ähnlich. Hieraus folgt durch Anwendung des Satzes in Nr. 159: **Projiziert man zwei ebene Schnitte eines Kegels von einem beliebigen Punkte auf eine Ebene, so erhält man zwei Figuren, die sich in einer Homologie entsprechen, deren Zentrum die Projektion des Scheitels, deren Achse die der Schnittlinie der beiden Schnittebenen ist.**

Die meisten projektiven Eigenschaften der Kegelflächen lassen sich erhalten, indem man diese auffaßt als Figuren, die durch Projektion einer ebenen Kurve von einem außerhalb gelegenen Punkte erzeugt werden; den Punkten der Kurve entsprechen dann die Erzeugenden der Fläche, insbesondere den vielfachen Punkten der ersteren die vielfachen Erzeugenden der letzteren; ist die Kurve algebraisch und von der Ordnung n, so ist es auch der Kegel; so wie jene durch $\frac{n(n+3)}{3}$ ihrer Punkte bestimmt ist, so auch jener durch ebensoviele seiner Erzeugenden; zwei Kegelflächen mit demselben Scheitel schneiden sich

in einer bestimmten Zahl von Erzeugenden usw. Dieselben Eigenschaften lassen sich aber auch erhalten, wenn man eine Kegelfläche (die ja eine Folge von ∞^1 durch einen Punkt gehenden Geraden ist) als das im Raume duale Gebilde zu einer ebenen Kurve auffaßt, indem man diese als eine Folge von ∞^1 in einer Ebene liegenden Geraden betrachtet. Alsdann entsprechen die Erzeugenden der Fläche nicht mehr den Punkten, sondern den Tangenten der Kurve; insbesondere die Doppelerzeugenden der Fläche den Doppeltangenten der Kurve. Beide Erzeugungsweisen muß man sich stets vor Augen halten, um sie in geeigneten Fällen anzuwenden.

Liegt der Scheitel im Unendlichen, so geht die Kegelfläche in eine Zylinderfläche über; der endliche zwischen zwei zueinander parallelen Ebenen gelegene Teil derselben heißt Zylinder und man betrachtet die durch jene beiden Ebenen erzeugten Schnittkurven als die Basis. Alle zueinander parallelen Schnittlinien eines Zylinders sind einander kongruent, folglich sind es auch ihre Parallelprojektionen auf eine beliebige Ebene in beliebiger Richtung.

252. Es seien a, b, c die kartesischen Koordinaten des Scheitels V eines Kegels, und

$$x = \xi(t), \qquad y = \eta(t), \qquad z = \zeta(t)$$

die analytische Darstellung der als Leitlinie gewählten Kurve Γ. Die Gerade, welche V mit dem Punkte (t) von Γ verbindet, hat alsdann die Gleichung:

$$\frac{x-a}{\xi(t)-a} = \frac{y-b}{\eta(t)-b} = \frac{z-c}{\zeta(t)-c}; \qquad \ldots \ldots \quad (1)$$

ist nun u der gemeinsame Wert dieser Brüche, so bekommt man als parametrische Darstellung der Kegelfläche

$$x = a(1-u) + u \cdot \xi(t), \quad y = b(1-u) + u \cdot \eta(t), \quad z = c(1-u) + u \cdot \zeta(t).$$

Wenden wir hierauf die Gl. (9) in Nr. 224 an, so finden wir leicht als allgemeine Gleichung der Tangentialebene an die Fläche

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ \xi(t)-a & \eta(t)-b & \zeta(t)-c \\ \xi'(t) & \eta'(t) & \zeta'(t) \end{vmatrix} = 0, \qquad \ldots \ldots \quad (2)$$

woraus sich folgende Eigenschaften ergeben: 1. Da Gl. (2) befriedigt wird durch $x = a$, $y = b$, $z = c$, welchen Wert auch t haben mag, so **enthalten alle Berührungsebenen den Scheitel.** 2. Da in Gl. (2) u nicht vorkommt, so **haben sämtliche Punkte einer Erzeugenden dieselbe Berührungsebene.** 3. Da (2) die Gleichung der durch den Scheitel und die Gerade $\dfrac{x-\xi(t)}{\xi'(t)} = \dfrac{y-\eta(t)}{\eta'(t)} = \dfrac{z-\zeta(t)}{\zeta'(t)}$

gehenden Ebene ist, so **enthalten alle Berührungsebenen einer Kegelfläche auch die Tangenten der Leitkurve bzw. der Basis.**

Will man die Kegelfläche durch eine einzige Gleichung zwischen x, y, z darstellen, so hat man aus (1) t und u zu eliminieren; die von u vollzieht sich sehr leicht, und man erhält als Resultat folgendes Paar von Gleichungen

$$\frac{x-a}{z-c} = \frac{\xi(t)-a}{\zeta(t)-c}, \qquad \frac{y-b}{z-c} = \frac{\eta(t)-b}{\zeta(t)-c}.$$

Eliminiert man hieraus t, so bekommt man eine Gleichung von folgendem Typus

$$F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0,$$

die man offenbar auch in die Form bringen kann

$$f(x-a,\ y-b,\ z-c) = 0, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

wo f eine homogene Funktion der Argumente $x-a$, $y-b$, $z-c$ ist.

Umgekehrt: wenn f eine homogene Funktion der Binome $x-a$, $x-b$, $z-c$ ist, so hat man gemäß der Definition für alle Werte von ϱ

$$f[\varrho(x-a),\ \varrho(y-b),\ \varrho(z-c)] = \varrho^{\mu}\cdot f[x-a,\ y-b,\ z-c],$$

wo μ der Grad der Homogenität von f ist; daraus folgt, daß, wenn

$$f(x-a,\ y-b,\ z-c) = 0,$$

so ist auch

$$f[\varrho(x-a),\ \varrho(y-b),\ \varrho(z-c)] = 0.$$

Dies bedeutet, wenn $P(x, y, z)$ ein Punkt der Fläche $f(x, y, z) = 0$ ist, so gehören dieser auch alle Punkte der Geraden OP an; die Fläche enthält also ∞^1 Strahlen eines Bündels, ist also eine Kegelfläche mit dem Scheitel im Anfangspunkte.

Wir wollen jetzt die parabolische Kurve der Kegelfläche aufsuchen und legen zu dem Zwecke der Einfachheit halber den Scheitel in den Koordinatenanfang d. h., wir setzen $a = b = c = 0$. Wir betrachten daher zugleich mit (3) die Gl. (11) aus Nr. 225:

$$\varDelta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\cdot\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\cdot\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\cdot\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\cdot\partial z} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\cdot\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\cdot\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Erinnern wir uns nun des Eulerschen Satzes über homogene Funktionen, so haben wir

$$\mu\cdot f(x, y, z) = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \ldots\ldots \quad (*)$$

und wenn wir differenzieren

$$(\mu-1)\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x\cdot\partial y} + z\frac{\partial^2 f}{\partial x\cdot\partial z},$$

und zwei analoge. Wenn wir daher in die Determinante $\varDelta$ die Elemente der letzten Vertikalreihe ersetzen durch die der drei ersten, nachdem sie mit
$$\frac{x}{\mu-1},\quad \frac{y}{\mu-1},\quad \frac{z}{\mu-1}$$
bzw. multipliziert sind, so erhalten wir

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial z} & 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial z} & 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \cdot \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \cdot \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & -\frac{\mu}{\mu-1} f(x, y, z) \end{vmatrix},$$

oder auch

$$\varDelta = -\frac{\mu}{\mu-1} f(x, y, z) \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \cdot \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \cdot \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

Aus diesem Ausdrucke ergibt sich, daß, wenn $f(x, y, z) = 0$, auch $\varDelta = 0$ ist und daher: **Eine jede Kegelfläche besteht nur aus parabolischen Punkten** (abgesehen vom Scheitel).

Um den scheinbaren Umriß (s. Nr. 229) des Kegels gesehen von einem beliebigen Punkte $P(l, m, n)$ zu erhalten, kombinieren wir Gl. (3) mit der folgenden
$$(x-l)\frac{\partial f}{\partial x} + (y-m)\frac{\partial f}{\partial y} + (z-n)\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$
oder wegen der Gl. (*)
$$l\frac{\partial f}{\partial x} + m\frac{\partial f}{\partial y} + n\frac{\partial f}{\partial z} = \mu \cdot f(x, y, z).$$
Da nun diese Gleichung zugleich mit (3) betrachtet werden muß, so ist es gestattet, sie durch folgende zu ersetzen:
$$l\frac{\partial f}{\partial x} + m\frac{\partial f}{\partial y} + n\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$
Da auch diese homogen ist, so stellt sie einen neuen Kegel dar, der ebenfalls seine Spitze im Anfangspunkte hat; er schneidet also den gegebenen längs Erzeugenden und daher: **Der scheinbare Umriß einer Kegelfläche gesehen von einem beliebigen Punkte des Raumes besteht immer aus einer bestimmten Zahl von Erzeugenden.**

Die beiden vorigen Sätze bestehen gleichfalls für Zylinderflächen, allerdings gelten nicht mehr die Gl. (1) und (2). Die jetzt anzuwendenden Formeln erhält man auf folgende Art. Wir nehmen als Leitlinie die vorhin betrachtete Kurve Γ und nehmen an, daß die Erzeu-

genden mit den Koordinatachsen die Winkel α, β, γ bilden mögen; alsdann ist

$$\frac{x - \xi(t)}{\cos\alpha} = \frac{y - \eta(t)}{\cos\beta} = \frac{z - \zeta(t)}{\cos\gamma}$$

die Gleichung einer Erzeugenden, und die parametrische Darstellung Zylinderfläche wird daher lauten

$$x = \xi(t) + u\cdot\cos\alpha,\quad y = \eta(t) + u\cdot\cos\beta,\quad z = \zeta(t) + u\cdot\cos\gamma,\qquad (4)$$

und die allgemeine Gleichung der Berührungsebene

$$\begin{vmatrix} x - \xi(t) & y - \eta(t) & z - \zeta(t) \\ \xi'(t) & \eta'(t) & \zeta'(t) \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0.\quad .\quad .\quad .\quad .\qquad (5)$$

Zur Übung: I. Man beweise, daß alle Punkte einer Zylinderfläche parabolisch sind. — **II.** Eine Zylinderfläche kann auf unendlich viele Arten als eine Translationsfläche (vgl. Nr. 233) aufgefaßt werden. — **III.** Von welcher Art sind die Isophoten (s. Nr. 230) einer Kegel- oder Zylinderfläche? —

§ 2. Graphische Darstellung der Kegel- oder Zylinderflächen.

253. Das gewöhnliche Verfahren eine allgemeine Kegel- oder Zylinderfläche zu bestimmen, besteht darin, daß man den Scheitel angibt bzw. die gemeinsame Richtung der Erzeugenden und die Kurve, die als Leitlinie dienen soll, letztere gewöhnlich als in einer Ebene gelegen, also als Basis dienend.

Bei Anwendung der Mongeschen Methode wird man also den Scheitel $V \equiv (V', V'')$, ferner die beiden Spuren t_1, t_2 der Ebene der Basis $\varDelta$ und eine der beiden Projektionen von $\varDelta$, etwa $\varDelta'$ angeben (s. Fig. 101). Bei diesen Daten ist es leicht, die Darstellung einer beliebigen Erzeugenden der Fläche, z. B. der durch den Punkt P' von $\varDelta'$ gehenden, zu finden. Wir suchen uns zunächst (nach Nr. 17) den Punkt P''; dann sind die Geraden $P'V'$, $P''V''$ die Projektionen der gesuchten Erzeugenden g.

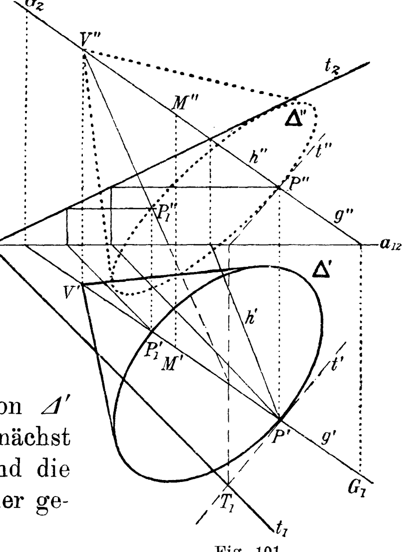


Fig. 101.

Variieren wir P' auf $\varDelta'$, so erhalten wir weitere. Die von V' an $\varDelta'$ gezogenen Tangenten bilden, wenn sie reell sind, den ersten scheinbaren Umriß der Fläche gesehen vom Zenith der Grundrißebene; wenn nun diese Tangenten sämtlich imaginär sind, so existiert ein solcher Umriß nicht.

Variieren wir P auf $\varDelta$ so beschreiben die beiden Spurpunkte G_1 und G_2 der Erzeugenden g zwei Kurven Γ_1 und Γ_2, welche die Schnitte

der Kegelfläche mit der Grund- und Aufrißebene darstellen, und die **erste und zweite Spur** der Fläche heißen. Aus den Bemerkungen in Nr. 237 geht hervor, daß Γ_1 und Δ' sich in einer Homologie entsprechen, deren Zentrum V' und deren Achse t_1 ist; Analoges gilt von Γ_2 und Δ''. Da, wie gezeigt, Scheitel und Basis genügen, um die Spur der Kegelfläche in den Projektionsebenen zu finden, **so kann man,** ohne der Allgemeinheit Eintrag zu tun, **eine Kegelfläche auch durch den Scheitel und eine ihrer Spuren in den Projektionsebenen bestimmen.** Schließlich sei noch bemerkt, daß die Geraden g' und g'' sich in einem Punkte G_0 treffen, dessen geometrischer Ort eine Kurve Γ_0 ist, in welcher die Projektionen des Schnittes der Fläche mit der zweiten Halbierungsebene zusammenfallen. Auch Γ_0 kann als Basis des Kegels gewählt werden, und dürfte oft aus Gründen der Symmetrie und Einfachheit jeder anderen Wahl vorzuziehen sein[1]).

Ist der Kegel wie oben bestimmt, so ist es auch leicht, **die zweite Projektion eines Punktes M der Fläche zu bestimmen, wenn die erste gegeben ist.** M liegt ja auf einer der Erzeugenden, die sich z. B. in $V'M'$ projiziert; schneidet nun $V'M'$ die Kurve Δ' in $P', P_1' \ldots$ so lassen sich leicht $P'', P_1'' \ldots$ auf Δ'' (bzw. τ) gelegen finden, die zweite Projektion muß also auf einer der Geraden $V''P''$, $V''P_1'' \ldots$ liegen, also ist sie einer der Punkte in welchen die Ordinate von M' diese Geraden schneidet (s. wieder die Fig. 101). Die Aufgabe hat soviele reelle Lösungen, als es Schnitte von $V'M'$ mit Δ' gibt, demnach muß es wenigstens einen geben, wenn die Lösung überhaupt möglich sein soll.

Die ähnliche Aufgabe: **Gegeben die zweite Projektion M'' eines Punktes der Fläche, gesucht die erste,** würde sich in ganz analoger Weise lösen lassen, wenn die zweite Projektion der Basis Δ'' gezeichnet vorliegt; nun kann man Δ'' aus Δ' herleiten, aber man kann die Zeichnung von Δ'' vermeiden, wenn man in folgender Weise verfährt: Wir ziehen $V''M''$; dann ist $V''M'' \equiv g''$ die zweite Projektion einer Erzeugenden g, die Δ in einem Punkte P trifft. h sei nun diejenige Gerade der Ebene τ von Δ die sich in $V''M''$ projiziert, dann ist $h'' \equiv V''M''$. Wir bestimmen h' (s. Fig. 101). Offenbar enthält h den Punkt P, also dürfen wir als P' einen der Schnitte von h' mit Δ' nehmen, und die Gerade, die P' mit V' verbindet, kann als eine der Geraden g' angesehen werden. g' wird dann von der Ordinate des gegebenen Punktes M'' in dem gesuchten Punkte M' geschnitten.

Will man eine Zylinderfläche nach der Mongeschen Methode darstellen, so kann man außer der ersten Projektion Δ' der Basis und der Ebene τ derselben noch eine Gerade r angeben die zu allen Erzeugenden parallel ist. Die an der vorigen Figur ausgeführten Konstruktionen sind auch hier anwendbar, wenn man beachtet, daß V' der unendlich ferne

1) Diese Art der Bestimmung ist die Verallgemeinerung der Bestimmung einer Ebene durch einen Punkt und die Affinitätsachse (Nr. 16).

Punkt von r', V'' der von r'' ist; der Leser möge sie zu seiner Übung unter dieser Annahme wiederholen. — Besonders einfach wird die Darstellung, wenn die Erzeugenden senkrecht zu einer Projektionsebene sind, dann projizieren sie sich in dieser als Punkte, in der anderen als zur Achse senkrechte Geraden; es genügt dann eine der Spuren in den Projektionsebenen zur vollständigen Bestimmung der Fläche.

Zur Übung: I. Die Vereinfachungen zu bestimmen, welche obigen Konstruktionen erfahren, wenn die Kegel- oder Zylinderfläche durch ihre Spur in der zweiten Halbierungsebene gegeben ist. — **II.** Einen Kreiskegel darzustellen in Grund und Aufriß, wenn gegeben sind der Scheitel V, die Basisebene τ und der Grundkreisradius r. [Der Mittelpunkt C der Basis ist der Fußpunkt des von V auf τ gefällten Lotes; man lege τ in die π_1 um, suche (C); der mit r um (C) beschriebene Kreis liefert $(\varDelta)$, hieraus findet man $\varDelta'$ usw.]. — **III.** Die Kegelfläche darzustellen, die gebildet wird von allen durch einen Punkt V gehenden Geraden die mit einer festen ebenfalls durch V gehenden Geraden a denselben Winkel α bilden, oder die Enveloppe aller Ebenen, die durch V gehen und mit einer festen Ebene ε einen gegebenen Winkel β bilden. [Als Basis wähle man den Kreis in welchem der Kegel von einer zu a senkrechten Ebene τ geschnitten wird.] — **IV.** Einen geraden Kreiszylinder darzustellen von dem man die Achse, die Höhe und den Mittelpunkt und Radius des Grundkreises kennt. [Man nehme eine Umlegung vor ähnlich wie in II]. — **V.** Die Zylinderfläche darzustellen, deren Erzeugende von einer gegebenen Geraden einen gegebenen Abstand haben, und derselben parallel sind. [Als Basis nehme man einen zur Achse senkrechten Schnitt.] — **VI.** Eine Kegel- (oder Zylinder-)Fläche darzustellen, von der man außer dem Scheitel (oder der Richtung der Erzeugenden) eine nicht ebene Leitlinie kennt; wie muß man die Konstruktionen modifizieren, die in dieser Nr. dargestellt wurden?

254. Um eine Kegelfläche in Zentralprojektion darzustellen, kann man ihren Scheitel $V \equiv (V', TI')$ oder $\equiv (V', ti')$ geben sowie ihre Basis $\varDelta$ als $(\varDelta', ti')$. Will man die einzelnen Erzeugenden erhalten, z. B. die durch den Punkt P' von $\varDelta'$ gehende, so kann man folgendermaßen verfahren (Fig. 102). Sie ist die Verbindungslinie g der beiden Punkte P und V; nennt man nun T_p, I_p' die Darstellungselemente von g, so kann man diese nach dem in Nr. 67γ dargestellten Verfahren ermitteln als Verbindungslinie der Punkte $V \equiv (V', TI')$ und $P \equiv (P', ti')$: wir suchen daher zunächst den Punkt N, in dem die Gerade $[TI']$ die Ebene $[ti']$ schneidet, und bestimmen die Darstellungselemente $U_p J_p'$ der Geraden NP; alsdann sind die Geraden TU_p und $I'J_p$ einander parallel und schneiden $V'P'$ in den gesuchten Punkten T_p, I_p'. Man beachte, daß der Punkt N derselbe für alle Punkte von $\varDelta$ ist, ist dieser daher ein für alle Mal konstruiert, so erfordert die Auf-

Fig. 102.

findung von T_p, I_p' nur das Ziehen von vier Geraden. Variiert man den Punkt P' auf Γ', so beschreiben die Punkte T_p und I_p' zwei Kurven T und Υ', von denen die erstere die Spur der Fläche mit der Bildebene ist, die andere die Projektion der unendlich fernen Linie der Fläche auf die Bildebene, die sogenannte Fluchtlinie des Kegels ist. Gemäß den Bemerkungen in Nr. 251 sind die Kurven T und $\varDelta'$ homologisch zueinander mit V' als Zentrum, t als Achse, während $\varDelta'$ und Υ' sich in einer Homologie entsprechen, deren Achse i', deren Zentrum wieder V' ist.

Aus der angeführten Konstruktion ergibt sich auch sogleich ein Verfahren, die Darstellung eines Punktes der Fläche zu vervollständigen, von dem man nur das Bild M' kennt; man hat nur zu berücksichtigen, daß M einer der Erzeugenden angehört, die sich in $V'M'$ projizieren.

Die Konstruktionen vereinfachen sich in bemerkenswerter Weise, wenn man als Basiskurve die Spurlinie T der Kegelfläche in der Bildebene nimmt; alsdann ist irgend ein Punkt T_p von T die Spur einer Erzeugenden, deren Projektion $V'T_p$ ist, und deren Fluchtpunkt man erhält, indem man beachtet, daß die Geraden TT_p und $I'I_p'$ einander parallel sein müssen.

Dieselben Konstruktionen sind im wesentlichen auch anwendbar für Zylinderflächen, wenn diese durch ihre Basis und den gemeinsamen Fluchtpunkt ihrer Erzeugenden bestimmt sind.

Zur Übung: I. In Zentralprojektion eine Kegelfläche darzustellen, deren Scheitel in der vorderen Parallelebene liegt. — **II.** Desgleichen eine elliptische Zylinderfläche, deren Erzeugende sowohl als auch die große Achse der Basis zur Bildebene parallel sind. — **III.** Die in der vorigen Nr. gestellten Aufgaben in Zentralprojektion zu lösen. — **IV.** Nach der Methode der kotierten Ebenen die Erzeugenden einer Kegel- (bzw. Zylinder-)Fläche darzustellen, die als Basis einen zur Grundebene parallelen Kreis von gegebenen Zentrum und Radius hat, deren Scheitel (bzw. Richtung der Erzeugenden) angegeben ist. [Man zeichne sowohl die Erzeugenden als die Niveaulinien.]

§ 3. Anwendungen der graphischen Darstellung.

255. Aufgabe I. Die Berührungsebene an eine Kegel- oder Zylinderfläche in einem Punkte oder längs der entsprechenden Erzeugenden zu konstruieren.

Auflösung: Der Kegel sei in Orthogonalprojektion durch seinen Scheitel $V \equiv (V', V'')$ und seine Basis $\varDelta \equiv (\varDelta', t_1 t_2)$ bestimmt (vgl. hierzu die Fig. 101 auf S. 193). Sei M der gegebene Punkt, und $g \equiv (g', g'')$ die entsprechende Erzeugende. Die gesuchte Ebene geht durch die (schon vollständig dargestellte) Gerade g, ferner durch die Tangente t an die Basis $\varDelta$ in P, dem Schnitte von g mit $\varDelta$. Der Grundriß t' ist die in P' an $\varDelta'$ gezogene Tangente und ihre erste Spur $T_1 \equiv t' t_1$. Hieraus ergibt sich T_1'' auf a_{12}, das mit P'' verbunden t'' liefert. Die gesuchte Ebene ist dann die durch die beiden Geraden g und t gehende; ihre Spuren lassen sich dann leicht finden.

Diese Konstruktionen bleiben natürlich im wesentlichen unverändert, werden aber einfacher und symmetrischer, wenn die betrachtete Fläche durch ihre Spur in der zweiten Halbierungsebene oder eine nicht ebene Leitlinie bestimmt ist, oder wenn sie zylindrisch ist; den Nachweis überlassen wir dem Leser.

Dasselbe Verfahren läßt sich auch bei der Zentralprojektion anwenden. Die bezüglichen Konstruktionen sind in Fig. 102, S. 195 ausgeführt; das Resultat ist die durch die gestrichelten Linien dargestellte Ebene $[t_p i_p']$.

Aufgabe II. Die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kegel- oder Zylinderfläche zu bestimmen.

Auflösung: In Orthogonalprojektion seien die Daten: $r \equiv (r', r'')$ die Gerade; $V \equiv (V', V'')$ die Spitze, und $\Delta \equiv (\Delta', t_1 t_2)$ die Basis des Kegels. Wir konstruieren zunächst die Ebene $\sigma \equiv [s_1, s_2]$, die durch r

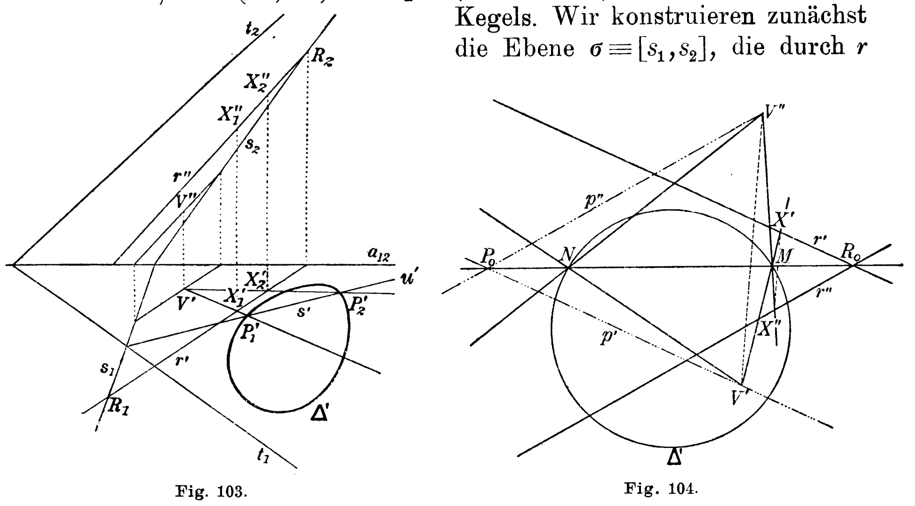


Fig. 103. Fig. 104.

und V geht (s. Fig. 103), denn in dieser müssen die gesuchten Punkte liegen und zwar auf den in σ liegenden Erzeugenden. Nun konstruieren wir die Schnittlinie u der beiden Ebenen σ und $\tau \equiv [t_1, t_2]$; es genügt eine ihrer Projektionen, etwa u'. Letztere schneidet Δ' in den Punkten $P_1', P_2' \ldots$; dann sind $V'P_1', V''P_2'' \ldots$ die ersten Projektionen derjenigen Erzeugenden des Kegels, die in der Ebene Vr liegen. Demnach liefern die Punkte, in denen sie r' treffen, den Grundriß $X_1', X_2' \ldots$ der gesuchten Punkte, während die Schnitte von r'' mit den zugehörigen Ordinaten den Aufriß liefern. — Diese Konstruktion bietet sich unter einer symmetrischen und eleganten Form dar, wenn die Kegelfläche durch ihre Spuren in der zweiten Halbierungsebene bestimmt ist (Fig. 104); in diesem Falle ist die Ebene σ durch die Gerade r und die durch V zu r gezogene Parallele bestimmt, während die Projektionen der Geraden $\sigma\tau$ mit der Verbindungslinie der Punkte

$p'r'$ und $p''r''$ zusammenfallen. Sind $M, N \ldots$ die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Kurve $\varDelta' = \varDelta''$, so sind die Punkte $X' = V'M \cdot r'$ und $X'' = V''M \cdot r''$ die Projektionen eines der gesuchten Punkte; ähnlicherweise findet man die anderen. Als Kontrolle dient, daß die Geraden $X'X''$, $V'V''$ parallel sein müssen. Man beachte, daß diese Konstruktion von der Grundlinie unabhängig ist; daher hat man sie in Fig. 104 nicht einmal gezeichnet.

Da der Grundgedanke dieser Lösung unabhängig von der Darstellungsmethode ist, so läßt er sich z. B. auch für die Zentralprojektion verwenden, und wir überlassen es dem Leser, die betreffende Figur zu zeichnen.

Auch wenn es sich um eine Zylinderfläche handelt, ist derselbe Gedanke anwendbar. Um dies zu zeigen möge die Zylinderfläche durch ihre Basis $\varDelta \equiv (\varDelta', ti')$ und den gemeinsamen Fluchtpunkt I_0' ihrer Erzeugenden dargestellt sein. Sollen nun die Schnitte mit der Geraden TI' (s. die Fig. 105) gesucht werden, so legen wir durch diese Gerade die zu den Erzeugenden parallele Ebene; ihre Flucht gerade ist $i_1' \equiv I'I_0'$, ihre Spurlinie die durch T zu i_1' gezogene Parallele t_1. Wir bestimmen nun die Gerade T_1I_1', in der sich die beiden Ebenen $[ti']$ und $[t_1'i_1']$ schneiden. Verbinden wir nun die Punkte, P_1', $P_2' \ldots$, in denen T_1I_1' der Basisprojektion $\varDelta'$ begegnet, mit I_0' so schneiden diese Verbindungslinien die Gerade TI' in den Projektionen X_1', $X_2' \ldots$ der gesuchten Punkte.

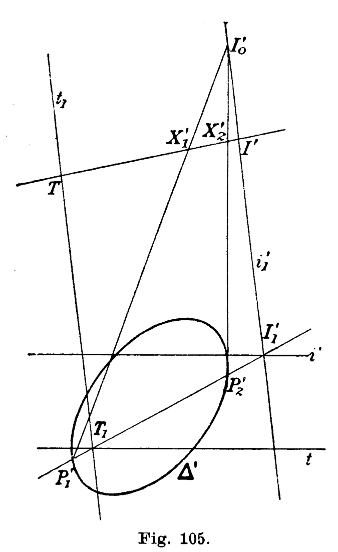


Fig. 105.

Anmerkung. Falls die betrachtete Fläche durch eine Leitlinie doppelter Krümmung bestimmt ist, führt die Aufgabe II auf die Aufsuchung der Punkte, in denen eine Raumkurve von einer Ebene geschnitten wird (Nr. 210). Da diese erhebliche graphische Schwierigkeiten darbietet, so erklärt sich die von uns gewählte übliche Angabe der Daten.

256. Aufgabe III. Von einem Punkte an eine Kegel- oder Zylinderfläche die Berührungsebenen zu legen.

Auflösung: Der Kegel sei in Orthogonalprojektion ebenso wie vorhin bestimmt, der Punkt sei $M \equiv (M', M'')$ (s. Fig. 106). Die Tangentialebenen gehen außer durch M auch durch die Spitze des Kegels, sie enthalten also alle die Gerade $v \equiv VM$. Wir bestimmen deren Schnitt N mit der Basisebene $[t_1, t_2]$; von N ziehen wir an $\varDelta$ die Tangenten $x_1, x_2 \ldots$. Diese haben nun zu ersten Projektionen die von N'

an $\varDelta'$ gezogenen Tangenten; die zweiten ergeben sich daraus, daß die Geraden in der Ebene $[t_1, t_2]$ liegen müssen. Alsdann bestimmt jede der Geraden $x_1, x_2, \ldots$ zugleich mit v eine der gesuchten Ebenen.

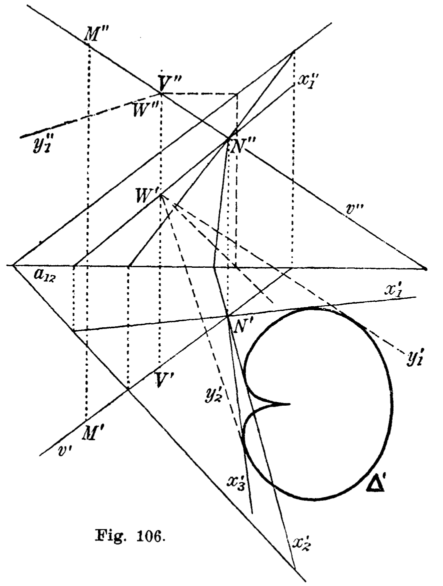


Fig. 106.

Zur Übung: Wie gestaltet sich diese Konstruktion im Falle, daß man als Basis der Kegelfläche seine Spur in der zweiten Halbierungsebene wählt?

Auch die Idee dieser Lösung läßt sich, da sie unabhängig von der Darstellungsmethode ist, auf die Zentralprojektion und die Methode der kotierten Ebenen anwenden. Wir überlassen es dem Leser die entsprechende Figur zu zeichnen. In dem Falle, daß der Punkt M mit dem Projektionszentrum zusammenfällt, erhält man so den scheinbaren Umriß der Fläche, gebildet aus der Projektion der Basis und den von M' an diese gezogenen Tangenten. — Dieselbe Idee läßt sich gleichfalls verwenden, wenn es sich um eine Zylinderfläche handelt. Um dies zu zeigen, wollen wir bei Anwendung von Zentralprojektion die Tangentialebenen konstruieren, die von dem Punkte $M \equiv (TI', M')$ an den Zylinder gehen, der durch seine Basis $\varDelta \equiv (\varDelta', ti')$ und durch den gemeinsamen Fluchtpunkt I_0' seiner Erzeugenden bestimmt ist (s. Fig. 107). Wir bestimmen zunächst die Spur T_0 der durch M parallel zu den Erzeugenden gehenden Geraden v, alsdann den Punkt $N \equiv (T_0 I_0', N')$, in dem v die Ebene $[t\,i']$ trifft. Die von N an $\varDelta$ gezogenen Tangenten $x_1, x_2 \ldots$ haben die von N' an $\varDelta'$ gezogenen Tangenten zu Projektionen, und ihre anderen Darstellungselemente ergeben sich daraus, daß sie alle in der Ebene $[t\,i']$ liegen. Setzen wir nun $x_k \equiv (T_k I_k')$, so sind $t_k \equiv T_0 T_k$ und $i_k' \equiv I_0 I_k'$ $(k = 1, 2, 3 \ldots)$ die Darstellungselemente der gesuchten Ebenen.

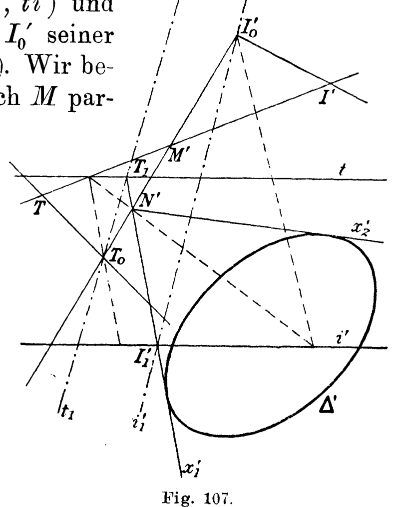


Fig. 107.

Die angeführte Lösung erfordert keine wesentlichen Änderungen, wenn der Punkt M sich im Unendlichen befindet, und zwar in einer

gegebenen Richtung. Die Aufgabe besteht dann darin „die Berührungsebenen einer Kegelfläche in einer gegebenen Richtung zu ermitteln". Benutzt man Orthogonalprojektion, so ist der Fall besonders interessant, daß diese Richtung senkrecht zu einer Bildebene ist; alsdann bilden die Spuren dieser Ebenen die Projektion des scheinbaren Umrisses der Fläche. Diese Spuren sind die von V' bzw. V'' an Δ' bzw. Δ'' gezogenen Tangenten; ist nun Δ' vollständig gezeichnet, so erhält man die ersten Spuren sogleich, die zweiten können erhalten werden, auch ohne daß die Projektion Δ'' der Basis gezeichnet wird, und zwar so: Wir fällen von V das Lot auf die Aufrißebene und bestimmen dessen Schnitt W mit der Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$ (s. hierzu die vorige Fig. 106). W'' fällt offenbar mit V'' zusammen, und W' kann nach einem bekannten Verfahren (Nr. 24) gefunden werden. Nun projizieren sich die von W an die Basis Δ gezogenen Tangenten im Aufriß in die Geraden, die den zweiten scheinbaren Umriß der Fläche in der Aufrißebene bilden; im Grundriß projizieren sich die Tangenten in die von W' an Δ' gezogenen Tangenten y_1', y_2'.... Sind diese gezeichnet, so ergeben sich daraus y_1'', y_2''... leicht, und damit hat man die Spuren der zur Aufrißebene senkrechten Berührungsebenen des Kegels.

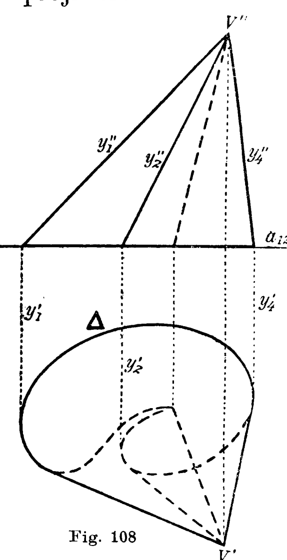


Fig. 108

Die angeführten Konstruktionen vereinfachen sich sehr, wenn man als Basis der Kegelfläche die Spur Δ in der Grundrißebene nimmt. W' ist dann der unendlich ferne Punkt der zur Achse a_{12} senkrechten Richtung, daher sind y_1', y_2'... die zu a_{12} senkrechten Tangenten von Δ; die Punkte, in denen sie die a_{12} schneiden, liefern verbunden mit $V'' \equiv W''$ und der zwischen ihnen liegenden Strecke der Achse den zweiten scheinbaren Umriß des Kegels. S. Fig. 108.

Anmerkung. Im Falle die Fläche durch eine nicht ebene Direktrix bestimmt ist, führt die Aufgabe III auf die nicht leichte Ermittlung der Ebenen, die durch die Gerade VM gehen und eine Raumkurve berühren (oder, was dasselbe ist, solcher Tangenten derselben, die jene Gerade treffen; vgl. Nr. 211).

257. Aufgabe IV. Den Schnitt einer Kegel- oder Zylinderfläche mit einer Ebene zu bestimmen.

Auflösung: Die gesuchte Kurve ist der geometrische Ort der Punkte, in denen die gegebene Ebene von den Erzeugenden der Fläche geschnitten wird, somit läßt sich die gestellte Aufgabe durch wiederholte Anwendung einer Fundamentalaufgabe der Lage lösen. Das Ver-

fahren läßt sich jedoch vereinfachen durch folgende Bemerkungen, bei denen wir jedoch zweckmäßig den Fall, daß der Scheitel in endlicher Entfernung liegt von dem anderen auseinander halten.

a) Kegelflächen. Der in Orthogonalprojektion dargestellte Kegel habe die Spitze $V \equiv (V', V'')$, die Basis $\Delta \equiv (\Delta', t_1 t_2)$, und $\sigma \equiv [s_1, s_2]$ sei die Ebene deren Schnitt Σ wir suchen (s. Fig. 109). Wir wissen aus Nr. 251, daß sich die Kurven Δ' und Σ' in einer Homologie entsprechen mit dem Zentrum V' und der Achse s', welche die Projektion der Schnittlinie s der beiden Ebenen σ und $\tau \equiv [t_1, t_2]$ ist. Um jene Korrespondenz vollständig zu bestimmen, genügt die direkte Konstruktion eines Paares entsprechender Punkte, z. B. der ersten Projektion der beiden Punkte S und D, in denen σ und τ von einer beliebigen durch V gehenden Geraden getroffen werden. Als solche können wir sehr wohl das von V auf die Aufrißebene gefällte Lot nehmen; nämlich dann fallen S'' und D'' mit V'' zusammen, und S' und D' können in bekannter Weise (s. Nr. 24) gefunden werden. Andererseits läßt sich diese Homologie folgendermaßen bestimmen: Wir beachten, daß die unendlich fernen Punkte der Grundebene die Projektionen der unendlich fernen Punkte von τ sind, und daß diesen die Punkte der Geraden j entsprechen, in der σ von der Ebene $[u_1, u_2]$ geschnitten wird, die durch V parallel zu τ gelegt wird. Hieraus folgt, daß in der zwischen Δ' und Σ' auftretenden Homologie der unendlich fernen Geraden der ersteren die Punkte der Geraden j' entsprechen. Diese ist demnach eine der Fluchtgeraden und vervollständigt somit die Bestimmung der besagten Homologie. Die andere Fluchtgerade ist j_1', die Projektion der Schnittlinie der Ebene τ mit der Ebene $[v_1, v_2]$, die durch V parallel zu σ gelegt ist. Nachdem man so diese Homologie fest gelegt hat (s. Fig. 109), ergibt sich die Herleitung von Σ' aus Δ' nach dem Verfahren, das uns die projektive Geometrie lehrt, Σ'' erhält man dann aus Σ', indem man die Affinität dieser beiden Figuren benutzt, deren Achse die Affinitätsachse $a' \equiv a''$ der Ebene σ ist (vgl. Nr. 15 u. 17). — Die Tangenten von Σ' sind die Geraden, die den Tangenten von Δ' in der Homologie entsprechen, insbesonders entsprechen ihre Asymptoten den Tangenten von Δ' in den Schnittpunkten mit j_1'. —

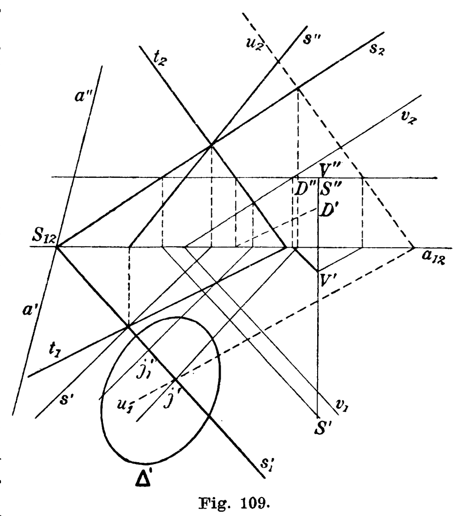


Fig. 109.

In ähnlicher Weise kann man verfahren, wenn man sich der Zentral-

projektion bedient. Die Data seien hier $V \equiv (TI', V')$, $\varDelta \equiv (\varDelta', ti')$ und $\sigma \equiv [t_0 i_0']$ (Fig. 110). Auch hier entsprechen sich Σ' und $\varDelta'$ in einer Homologie mit dem Zentrum V' und der Achse s', welches die Projektion der Schnittlinie der Ebenen $\tau \equiv [t\,i']$ und $\sigma \equiv [t_0 i_0']$ ist. Um diese Korrespondenz vollständig zu bestimmen, genügt die Auffindung der Projektionen der Punkte D und S, in denen eine beliebige durch V gehende Gerade σ und τ trifft. Als solche können wir offenbar auch die Gerade (TI') nehmen; sind D' und S' vermittels der Hilfsebene $[t_1 i_1']$ gefunden, so kann man nach einem Verfahren der projektiven Geometrie die Aufgabe zu Ende führen.

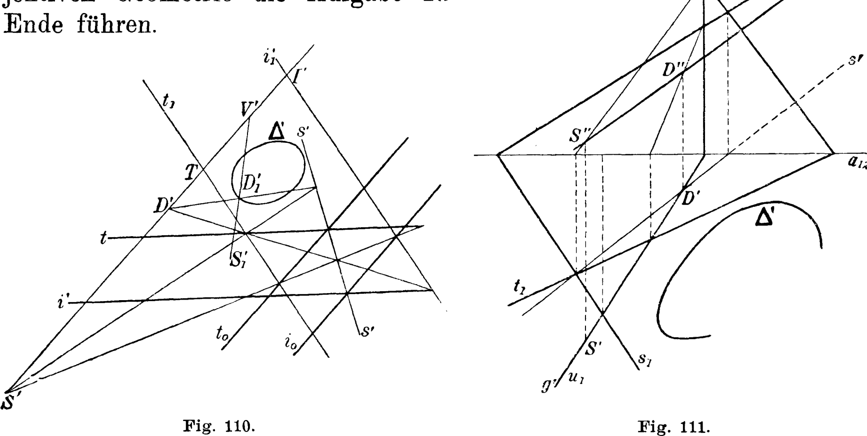


Fig. 110. Fig. 111.

b) Zylinderflächen. Sind die Erzeugenden senkrecht zu einer der Projektionsebenen (z. B. zur ersten) und ist $\varDelta$ die Basis, Σ die Schnittkurve, so fällt Σ' mit $\varDelta'$ zusammen, und Σ'' läßt sich finden, indem man beachtet, daß Σ der gegebenen Ebene angehört (Nr. 17). — Um im allgemeinen Falle die Schnittlinie Σ des Zylinders, dessen Basis $\varDelta \equiv (\varDelta', t_1 t_2)$ ist, und dessen Erzeugende parallel der Geraden $g \equiv (g', g'')$ sind, mit der Ebene $\sigma \equiv [s_1, s_2]$ zu finden (s. Fig. 111), beachten wir, daß $\varDelta'$ und Σ' sich in einer Affinität entsprechen, deren Achse die Projektion s' der Schnittlinie s der beiden Ebenen σ und $\tau \equiv [t_1, t_2]$. Zur vollständigen Bestimmung dieser Affinität ist nur noch ein Punktepaar erforderlich, etwa die Projektionen S' und D' der beiden Punkte $S \equiv \sigma g$ und $D \equiv \tau g$. Hat man nun Σ' gefunden, ergibt sich Σ'' leicht aus der Affinität zwischen Σ' und Σ''.

Wir überlassen es dem Leser, sich davon zu überzeugen daß bei Anwendung der Zentralprojektion die unter **a**) für die Kegelflächen angewendete Konstruktion auch auf Zylinderflächen anwendbar ist.

Zur Übung: I. Die Schnitte eines parabolischen geraden Zylinders mit einer gegebenen Geraden zu bestimmen. — **II.** Wie gestaltet sich die Lösung der IV. Aufg. wenn die Direktrix der Fläche nicht eben ist? —

258. Die soeben gelöste Aufgabe läßt in gewissem Sinne eine Umkehrung zu, nämlich dahin, daß man nach solchen Ebenen fragt, die die Kegel- oder Zylinderfläche in Kurven von verlangten Eigenschaften schneiden. Als Beispiel möge hier behandelt werden folgende

Aufgabe V. Gegeben eine Kegelfläche in Zentralprojektion durch ihre Spitze $V \equiv (TI', V')$ und ihre Basis, den Kegelschnitt $\Gamma \equiv (\Gamma', ti')$: gesucht eine Ebene, die ihn in einer Kurve schneidet, die sich auf die Bildebene in einen Kreis Γ_1' projiziert.

Auflösung: Wir ziehen von V' an Γ' die beiden Tangenten a und b (s. die Figur 112); sie bilden den scheinbaren Umriß des Kegels, daher muß jede Kurve auf der Kegelfläche sich in eine Linie

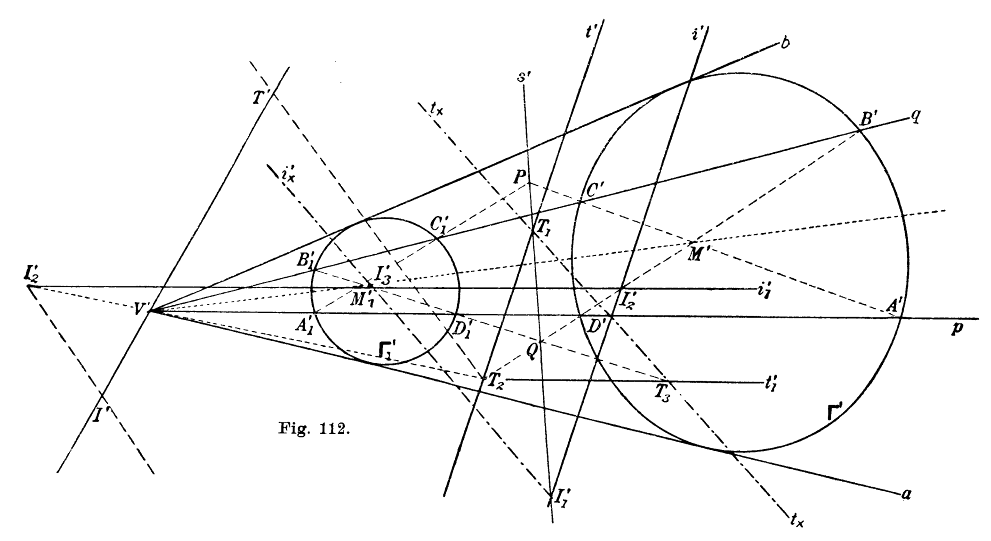


Fig. 112.

projizieren, die a und b berührt. Wir behaupten nun, daß ein (beliebiger) Kreis Γ_1' der a und b berührt und in demselben Winkelraum wie Γ' liegt, die Projektion einer der ∞^1 gesuchten Schnitte ist. Zum Beweise bestimmen wir auch die Ebene dieses Schnittes. Durch V' ziehen wir zu dem Zwecke zwei beliebige Geraden p, q, die Γ' und Γ_1' schneiden in A', B', C', D' und $A_1' B_1' C_1' D_1'$. $A'C'$ und $A_1'C_1'$ mögen sich in P, $B'D'$ und $B_1'D_1'$ in Q schneiden; wir ziehen nun die Gerade $PQ \equiv s'$. Dann entsprechen sich die beiden Kegelschnitte Γ' und Γ_1' in einer Homologie, deren Zentrum V' und deren Achse s' ist, $A'A_1', \ldots D'D_1'$ sind Paare entsprechender Punkte. Daher entspricht auch dem Punkte $M' \equiv A'C' \cdot B'D'$ der Punkt $M_1' \equiv A_1'C_1' \cdot B_1'D_1'$ und demnach liegen M' und M_1' mit V' in gerader Linie. Wir betrachten nun s' als die Projektion einer Geraden s der Ebene $[ti']$, deren Darstellungselemente T_1 und I_1' sein mögen. Nun ist M' die Projektion eines Punktes M der vollständig bestimmt ist; demnach ist auch

die Gerade VM bekannt. M_1' kann als Projektion eines Punktes M_1 angesehen werden, der ebenfalls völlig bestimmt ist. M_1 und s bestimmen nun die Ebene deren Darstellungselemente wir suchen. Zu dem Zwecke konstruieren wir die durch M und die Gerade (TI') bestimmte Ebene (indem wir zunächst M als auf BD gelegen ansehen, dessen Darstellungselemente T_2 und I_2' sind): sie sei $\equiv [t_1 i_1']$. Sie enthält offenbar die Gerade VM und also auch den Punkt M_1; wir schreiben also $M_1 \equiv (t_1 i_1', M_1')$; sind T_3, I_3' die Schnitte der Geraden $B_1 D_1$ mit t_1, i_1', so können wir auch schreiben $M_1 \equiv (T_3 I_3', M_1')$, und folglich hat die Ebene Ms als Darstellungselemente $t_x \equiv T_1 T_3$ und $i_x' \equiv I_1' I_3'$; zur Kontrolle diene, daß diese beiden Geraden parallel sein müssen.

Um zu zeigen, daß die Ebene $[t_x i_x']$ den gegebenen Kegel in einer Kurve schneidet, deren Projektion der Kreis Γ_1' ist, beachten wir, daß Γ_1' dem Γ' in einer Homologie entsprechen muß, deren Zentrum V'; die Achse muß die Projektion der Geraden sein, in der sich die Ebenen $[ti']$ und $[t_x i_x']$ schneiden, d. i. s', und entsprechende Punkte sind M' und M_1', also ist dieser Kegelschnitt der Kreis Γ_1'.

Man beachte, daß in der Wahl der Bezeichnung der Schnitte von p und q eine gewisse Willkür herrscht und somit auch in der Art, wie die beiden Kurven Γ' und Γ_1' aufeinander bezogen werden; M' und M_1' können demnach zwei verschiedene Lagen annehmen. Hieraus folgt, daß Γ_1' (ebenso wie jeder andere homolog beschriebene Kreis) die Projektion zweier ebener Schnitte des Kegels ist.

Zur Übung: Dieselbe Aufgabe für einen Zylinder zweiter Ordnung zu lösen.

259. Aufgabe VI. Die Schnittlinie zweier Kegel- oder Zylinder-Flächen zu bestimmen.

Auflösung: Haben die beiden Kegel eine gemeinsame Spitze, so besteht der Schnitt aus einer gewissen Zahl von Erzeugenden. Um diese zu finden, legen wir durch die beiden Kegel eine beliebige Ebene und bestimmen deren Schnittkurven mit den Kegeln; die beiden Kurven gemeinsamen Punkte geben mit der Spitze verbunden den gesuchten Schnitt.

Anwendungen: **I. Um die Schnittpunkte einer Kegel-** (oder Zylinder-)**Fläche mit einer Kurve Γ zu finden,** projiziere man diese vom Scheitel V aus und suche diejenigen Erzeugenden, die die Kegelfläche mit der projizierenden Fläche gemeinsam hat, diese schneiden die Kurve in den gesuchten Punkten. **II.** Die Auffindung der **gemeinsamen Tangentialebenen zweier konzentrischer** Kegel läßt sich in ähnlicher Weise, wie die der gemeinsamen Tangenten zweier ebenen Kurven bewerkstelligen.

Zur Übung: Man bestimme diejenigen Erzeugenden oder Tangentialebenen eines Kegels, der durch seine Spitze und eine Spurlinie gegeben ist, die mit einer Projektions- (oder einer beliebigen) Ebene einen gegebenen Winkel bilden.

Um nun die allgemeine Aufgabe VI zu lösen, nennen wir die Scheitel der beiden Kegel V_1 und V_2, und, indem wir die allgemeinen Bemerkungen in Nr. 235 beachten, schneiden wir beide Flächen mit einem Ebenenbüschel, dessen Achse wir zweckmäßig mit $V_1 V_2$ zusammenfallen lassen; dann wird jede seiner Ebenen die beiden Flächen längs einer Gruppe von Erzeugenden schneiden, und die Punkte, in denen die Erzeugenden der einen Gruppe die der anderen treffen, gehören der gesuchten Schnittlinie an.

Soll die Konstruktion in Orthogonalprojektion ausgeführt werden, so wird man zweckmäßig als Basis der beiden Flächen ihre Schnittlinien Δ_1 und Δ_2 in der Grundrißebene wählen, welche Annahme der Allgemeinheit der Betrachtung keinen Eintrag tut (vgl. Nr. 253). Wir bestimmen nun (s. die Figur 113) den ersten Spurpunkt T_1 der Geraden $V_1 V_2$ und ziehen durch ihn im Grundriß die beliebige Gerade t_1; diese ist dann die erste Spurlinie einer der Ebenen τ jenes Büschels. Schneidet nun t_1 Δ_1 in $P_1, Q_1 \ldots, \Delta_2$ in $P_2, Q_2 \ldots$, so bilden die Geraden $V_1 P_1$, $V_1 Q_1 \ldots$ den Schnitt von τ mit der ersten Fläche, $V_2 P_2$, $V_2 Q_2 \ldots$ den mit der zweiten. $V_1' P_1$, $V_1' Q_1 \ldots V_2' P_2$, $V_2' Q_2 \ldots$ sind nun die ersten Projektionen dieser Geraden; die zweiten bestimmt man, indem man V_1'' mit P_1'', $Q_1'' \ldots$ und V_2'' mit P_2'', $Q_2'' \ldots$, welch letztere Punkte auf der Achse liegen, verbindet. Die Schnittpunkte $X, Y, \ldots$ der Geraden $V_1 P_1$, $V_1 Q_1 \ldots$ mit den Geraden $V_2 P_2$, $V_2 Q_2 \ldots$ gehören der gesuchten Schnittlinie Σ an, und lassen sich sogleich darstellen. Lassen wir nun t_1 um T_1 sich drehen, so erhalten wir weitere Punkte von Σ. Die Ebenen, die die Kegel in $X, Y, \ldots$ berühren, schneiden sich in der Tangente an Σ in X. — Man beachte, daß in der Konstruktion von Σ' außer den Kurven Δ_1 und Δ_2 nur die V_1', V_2' und T_1 zur Verwendung kommen; bleiben diese fest, so ändert sich Σ' nicht. Wir haben demnach den Satz: **Bewegen sich die Spitzen zweier Kegelflächen auf zwei zu einer Ebene ϵ senkrechten Geraden, derart daß der Schnitt der Verbindungslinie mit ϵ fest bleibt, so durchläuft die Schnittlinie der beiden Flächen einen zu ϵ senkrechten Zylinder.**

Fig. 113.

Reelle Punkte von Σ erhalten wir nur solange t_1 beide Kurven Δ_1, Δ_2 schneidet; gibt es keine einzige derartige Gerade, so ist Σ völlig imaginär, bzw. es schneiden sich auch die beiden Flächen **nicht**. Andern-

falls jedoch kann Σ (ebenfalls seine Projektionen) aus mehreren getrennten Zweigen bestehen; dies trifft zu, wenn eine der Flächen in die andere eintritt und wieder herauskommt.

Besonders wichtig ist die Aufsuchung der unendlich fernen Punkte von Σ. Um diese zu finden, beachten wir, daß durch einen jeden dieser Punkte eine Erzeugende des einen und eine des anderen Kegels geht; umgekehrt jeder Punkt des Raumes, durch den von jedem Kegel eine Erzeugende hindurchgeht, ist ein Punkt von Σ. Somit stammt jeder unendlich ferne Punkt von Σ von einem Paar zu einander paralleler Erzeugenden her; also läuft unsere Untersuchung darauf hinaus, Paare solcher paralleler Erzeugenden der beiden Kegel aufzufinden. Wir ziehen zu dem Zwecke durch die Spitze V_1 die Parallelen zu den Erzeugenden des zweiten Kegels: dadurch entsteht ein dritter Kegel mit der Spitze V_1 in welchem jede Erzeugende, einem Paar paralleler Erzeugenden der beiden ersten Kegel entspricht. Konstruieren wir nun die Spurlinie $\varDelta_3$ jenes Kegels in der Grundebene und bestimmen deren Schnittpunkte $I_1, I_2 \ldots$ mit $\varDelta_1$, so sind die unendlich fernen Punkte der Erzeugenden $V_1 I_1$, $V_1 I_2$ die gesuchten.

Die Konstruktion von $\varDelta_3$ wird erleichtert, wenn man berücksichtigt, daß der erste und der dritte Kegel, da ihre Erzeugenden einander parallel laufen, die Kurve im Unendlichen gemeinsam haben; $\varDelta_2$ und $\varDelta_3$ sind somit perspektiv zu dieser ganz im Unendlichen gelegenen Kurve, entsprechen sich somit in einer Homologie, die als Zentrum den Spurpunkt T_1 der Geraden $V_1 V_2$ hat und als Achse die unendlich ferne Gerade. Es handelt sich also um eine Homothetie mit dem Zentrum T_1 und dem Ähnlichkeitsverhältnis $\frac{T_1 V_1}{T_1 V_2} = \frac{T_1 V_1'}{T_1 V_2'}$. Ist demnach M_2 ein Punkt von $\varDelta_2$, und ziehen wir $T_1 M_2$ und $V_1' M_2$, so trifft die durch V_2' zu $V_1' M_2$ gezogene Parallele $T_1 M_2$ in einem Punkte M_3 von $\varDelta_3$ (s. die Fig. 113). Lassen wir M_2 die Kurve $\varDelta_2$ durchlaufen, so beschreibt M_3 die $\varDelta_3$.

Die angeführte Konstruktion für Punkte der Schnittlinie zweier Kegel- (oder Zylinder-)flächen ist im wesentlichen auch bei Zentralprojektion anwendbar; als Basis der beiden Flächen nimmt man dann öfters ihre Spurlinien in der Bildebene.

Zur Übung: I. Den Schnitt zweier Kegel 2ter Ordnung mit verschiedener Spitze zn bestimmen, wenn diese sich längs einer Geraden berühren. Man zeige daß der Restschnitt ein Kegelschnitt ist. — **II.** In Zentralprojektion den übrigbleibenden Schnitt zweier Kegel zu bestimmen, wenn diese zwei gegebene Punkte als Spitzen und als gemeinsame Basis einen Kegelschnitt $\Gamma \equiv (t i', \Gamma')$ haben. — **III.** Den Ort der Punkte zu konstruieren, die von zwei gegebenen Geraden gleichen Abstand haben (vgl. Nr. 253 Übung V). Daraus die Punkte abzuleiten, die von d r e i gegebenen Geraden denselben Abstand haben. — **IV.** Die kubische Raumkurve zu zeichnen, in der sich zwei Kegel zweiter Ordnung schneiden, die außerdem noch eine Erzeugende gemeinsam haben. — **V.** In Orthogonalprojektion die Raumkurve 4. O. darzustellen, in der zwei Kegel 2. O. sich schneiden. — **VI.**

Zwei gerade Kreiszylinder, deren Achsen zwei aufeinander senkrecht stehende und sich treffende Geraden sind, schneiden sich in einer Kurve, die als Cycloimber[1]) bezeichnet wird: diese zu zeichnen unter der Voraussetzung, daß die Achsen senkrecht zu den Projektionsebenen seien. — **VII.** Die Methode der kotierten Ebenen auf die Darstellung von Kegel- (oder Zylinder-)flächen anzuwenden, sowie auf die Lösung der obigen Probleme. — **VIII.** Die Schnittkurve zweier Kegel- oder Zylinderflächen zu konstruieren unter der Annahme, daß diese durch ihre Spitze und ihre Spur in der zweiten Halbierungsebene gegeben seien.

Bemerkungen: I. Die dargelegten Konstruktionen der Schnittkurve zweier Kegel- oder Zylinderflächen bleibt im Grunde bestehen, wenn die Basen Γ, $\varDelta$ derselben in verschiedenen Ebenen γ, δ sich befinden. Um dies klarzulegen, nennen wir C und D die Durchschnittspunkte der Geraden UV resp. mit γ und δ, und A einen beliebigen Punkt der Geraden $\gamma\delta$. Ist M (oder N) ein Punkt, in dem die Gerade CA (od. DA) die Kurve Γ (od. $\varDelta$) schneidet, so sind UM und VN komplanare Erzeugende der gegebenen Flächen; ihr Schnittpunkt X gehört Σ an. Läßt man nun A die Gerade $\gamma\delta$ durchlaufen, so wird Σ punktweise beschrieben. Es möge dem Leser überlassen bleiben, diesen Begriff auf die bekannten Methoden der darstellenden Geometrie anzuwenden.

II. Die Aufgabe, den Schnitt Σ zweier Kegel zu finden, bietet größere Schwierigkeiten, wenn die Leitlinien $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ nicht ebene, sondern räumliche Kurven sind, weil dann die Auffindung der Schnitte einer solchen Kurve mit einer durch $V_1 V_2$ gehenden Ebene, sich nicht so einfach gestaltet, wie im vorigen Spezialfalle. Ist jedoch die Gerade $V_1 V_2$ senkrecht zu einer der Bildebenen, so wird sie wieder erleichtert; da dann nämlich V_1' mit V_2' zusammenfällt, so hat jede Hilfsebene τ als erste Spurlinie eine durch $V_1' \equiv V_2'$ gehende Gerade t_1, während die zweite t_2 senkrecht zur Achse a_{12} verläuft. τ schneidet dann $\varDelta_1$ in Punkten, deren erste Projektion die Schnitte von $\varDelta_1'$ mit t_1 sind (Fig. 114). Es sei P_1' einer dieser Punkte, dann liegt P_1'' auf $\varDelta_1''$, und $V_1'' P_1'' \equiv g_1''$ ist eine in der Ebene τ gelegene Erzeugende des ersten Kegels. Ähnlich liefert jeder Schnitt P_2' von g_1' mit $\varDelta_2'$ eine Erzeugende g_2 des zweiten. Der Punkt $X \equiv g_1 g_2$ gehört der gesuchten Kurve an; im Aufriß projiziert er sich in den Punkt $g_1'' g_2''$, im Grund-

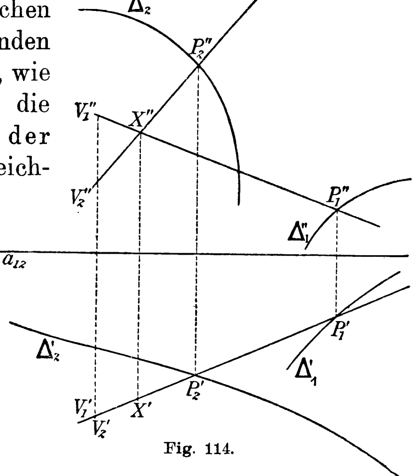


Fig. 114.

1) Von cyclus imbricatus d. h. gebogener Kreis.

riß in den Schnitt von t_1 mit der entsprechenden Ordinate. Jede Gerade durch $V_1' = V_2'$ liefert eine Gruppe solcher Punkte X, die die Kurve Σ bilden. — Es ist leicht zu sehen, daß diese Betrachtungen ihre Geltung behalten, wenn es sich um den Durchschnitt einer Kegel- mit einer Zylinderfläche handelt, deren Erzeugende normal zu einer der Projektionsebenen (z. B. zur ersten) sind. — Wenn man endlich den Durchschnitt Σ zweier Zylinderflächen mit unebenen Leitlinien punktweise konstruieren will, so kann man den Zweck unschwer erreichen im Falle, daß die Geraden d_1, d_2, zu denen die Flächenerzeugenden parallel sind, auf eine der Bezugebenen (z. B. im Aufriß) als parallele Geraden projiziert werden (Fig. 115). Um dies zu beweisen, betrachten wir eine beliebige zu $d_1'' = d_2''$ parallele Gerade; sie kann als Vertikalprojektion einer Erzeugenden g_1 der ersten und einer g_2 der zweiten Zylinderfläche angesehen werden; P_1 und P_2 seinen ihre Treffpunkte mit den Leitlinien $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$; P_1'' und P_2'' sind sogleich gefunden, P_1' und P_2' können daraus gefolgert werden. Die Parallelen durch P_1' und P_2'

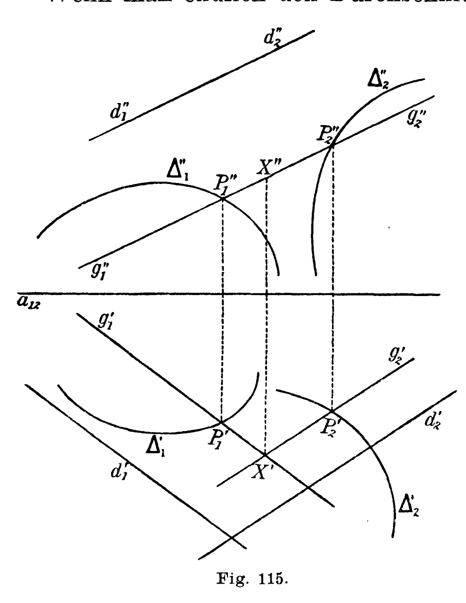


Fig. 115.

resp. zu d_1' und d_2' können als die Grundrisse von g_1 und g_2 betrachtet werden, und ihr Schnittpunkt als die erste Projektion eines Punktes der Kurve Σ; die entsprechende Ordinate schneidet die Gerade $g_1'' = g_2''$ in X''. Läßt man nun diese Gerade, unter Beibehaltung ihrer Richtung, variieren, so werden Σ' und Σ'' punktweise beschrieben.

Wenn aber die Data in keiner der beschriebenen günstigen Lagen sich befinden, so kann man sie durch Verlegung der Projektionsebenen in jene Lagen bringen, wie wir kurz beweisen wollen: α) Seien V_1 und V_2 die Kegelscheitel, s ihre Verbindungslinie, π_1 und π_2 die Projektionsebenen. Man wähle als neue Vertikalebene die Ebene π_2^*, die s auf π_1 projiziert und als neue Horizontalebene eine zu s senkrechte Ebene π_1^*: dann haben V_1 und V_2 auf π_1^* denselben Grundriß. β) Im Falle daß man eine Kegel- und eine Zylinderfläche hat, so kann man durch denselben Kunstgriff erreichen, daß die Erzeugenden der zweiten normal zur Horizontalebene werden. γ) Handelt es sich endlich um zwei Zylinderflächen, deren Erzeugende zu den Geraden d_1 und d_2 parallel sind, so nenne man δ eine zu d_1 und d_2 parallele Ebene; wählt man nun als neue Vertikalebene eine Ebene, die zu π_1

und δ senkrecht ist, so sind die neuen Aufrisse von d_1 und d_2 parallele Geraden, und die obige Konstruktion kann angewandt werden.

Es möge bemerkt werden, daß, während die Konstruktionen α) und β) i. a. sehr verwickelt sind, die γ) einfach und daher sehr brauchbar ist.

§ 4. Abwickelung einer Zylinderfläche in eine Ebene.

260. In die Basis Δ einer Zylinderfläche denken wir uns ein konvexes Vieleck $P_0 P_1 P_2 \ldots$ einbeschrieben und durch dessen Ecken die Erzeugenden $g_0, g_1, g_2 \ldots$ gezogen, so daß eine prismatische, dem Zylinder einbeschriebene Fläche entsteht. Wir denken uns nun die Fläche längs der Erzeugenden g_0 aufgeschnitten und lassen dann den Streifen $g_0 g_1$ um g_1 sich drehen, bis er in die Verlängerung von $g_1 g_2$ zu liegen kommt; den so entstandenen Streifen $g_0 g_2$ lassen wir sich um g_2 drehen, bis er mit $g_2 g_3$ in eine Ebene kommt; fahren wir so fort, so gehen alle die Prismenflächen in eine einzige Ebene über. Denken wir uns nun die Seiten des Polygons unendlich klein, während ihre Zahl unendlich groß wird, so geht bei der Grenze die prismatische Fläche in die zylindrische über, und diese würde dann auch in eine Ebene übergehen.

Diese Operation nennt man (vgl. Nr. 167) **die Abwickelung eines Zylinders in eine Ebene.** Zufolge dieses Verfahrens geht jede Kurve Γ auf der Zylinderfläche in eine ebene Kurve $[\Gamma]$ über, und die Länge des Bogens der ersteren zwischen irgendwelchen Punkten A und B wird gleich sein der Länge des Bogens von $[\Gamma]$ zwischen den entsprechenden Punkten $[A]$ und $[B]$. Betrachten wir ferner zwei Kurven Γ und Δ der Zylinderfläche, die durch denselben Punkt P gehen, sowie die Geraden c und d, die Γ und Δ in P berühren, so erhalten wir nach geschehener Abwickelung zwei Kurven $[\Gamma]$ und $[\Delta]$ die sich in $[P]$ schneiden und dort von den Geraden $[c]$ und $[d]$ berührt werden, die miteinander denselben Winkel bilden, wie c und d. Wir können also zusammenfassend sagen: **Bei der Abwicklung einer Zylinderfläche in eine Ebene bleiben Längen und Winkel erhalten.**[1])

261. Wir nehmen ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem, dessen z-Achse parallel den Erzeugenden und dessen xy-Ebene den senkrechten Schnitt als Basis des Zylinders liefert. Es sei dann

$$x = \xi(s), \quad y = \eta(s), \quad z = \zeta(s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die Gleichung einer beliebigen auf der Zylinderfläche gezeichneten Kurve Γ, wobei s die Bogenlänge von Γ bedeutet von einem beliebigen Kurvenpunkte Ω an gerechnet ist. Demnach werden (vgl. Nr. 192) die Funktionen ξ, η, ζ identisch den Gleichungen genügen

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1, \quad \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = 0, \text{ usw.}$$

1) Man kann auch sagen, daß diese Größen **Biegungsinvarianten** sind.



während man als Basiskurve $\varDelta$ diejenige betrachten kann, die dargestellt wird durch

$$x = \xi(s), \quad y = \eta(s). \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Um nun analytisch die Kurve $[\Gamma]$ darzustellen, in die Γ bei der Abwicklung übergeht, beziehen wir sie auf ein kartesisches Koordinatensystem (u, v) das die Projektion von Ω auf die xy-Ebene, den Punkt Ω' als Anfang hat und als Abszissenachse die Gerade $[\varDelta]$, in die sich infolge der Abwicklung die Kurve $\varDelta$ verwandelt, dann ist die Abszisse u eines Punktes $[P]$ von $[\Gamma]$ gleich dem von Ω' an gerechneten Bogen von $\varDelta$ bis zum Punkte P', der Projektion von P auf die xy-Ebene, während die Ordinate v mit der Koordinate z von P übereinstimmt. Die parametrische Darstellung von $[\Gamma]$ ist also folgende

$$u = \int ds \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}, \quad v = \zeta(s). \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Hieraus folgt dann: $ds^2 = du^2 + dv^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$, in Übereinstimmung mit der am Schluß der vorigen Nr. gemachten Bemerkung.

Für eine andere Kurve Γ_1, die derselben Zylinderfläche angehört, möge man die ähnliche parametrische Darstellung haben:

$$x = \xi_1(s_1), \quad y = \eta_1(s_1), \quad z = \zeta_1(s_1),$$

dann bestehen die Identitäten $\xi(s) = \xi_1(s_1)$, $\eta(s) = \eta_1(s_1)$ für alle Werte von s und s_1, während für $[\Gamma_1]$ die Gleichungen gelten:

$$u = \int ds_1 \sqrt{\xi_1'^2 + \eta_1'^2}, \quad v = \zeta_1(s_1). \quad \ldots \ldots \quad (3')$$

Bezeichnen wir nun den Winkel zwischen den beiden Kurven $[\Gamma]$ und $[\Gamma_1]$ in einem ihrer gemeinsamen Punkte $[P]$ mit θ, so haben wir

$$\cos\theta = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}\sqrt{\xi_1'^2 + \eta_1'^2} + \zeta'\zeta'_1$$

oder, zufolge der obigen Identitäten

$$\cos\theta = \xi'\xi'_1 + \eta'\eta'_1 + \zeta'\zeta'_1$$

also ist θ auch gleich dem Winkel, den die beiden Kurven Γ und Γ_1 in P miteinander bilden. Damit ist auch die andere Behauptung am Schlusse der vorigen Nr. bestätigt.

Aus Gl. (1) ergibt sich für den Krümmungsradius R in einem beliebigen Punkte von Γ

$$R = \frac{1}{\sqrt{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2}} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

während uns (3′) zeigt (nach Nr. 181), daß der Krümmungsradius $[R]$ von $[\Gamma]$ in dem entsprechenden Punkte ausgedrückt wird durch

$$[R] = \frac{[u'^2 + v'^2]^{\frac{3}{2}}}{u'v'' - u''v'} = \frac{(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}\,\zeta'' - \zeta'\dfrac{\xi'\xi'' + \eta'\eta''}{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}}} = \frac{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}}{(\xi'^2 + \eta'^2)\zeta'' - \zeta'(\xi'\xi'' + \eta'\eta'')}$$

oder

$$[R] = \frac{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}}{(1 - \zeta'^2)\,\zeta'' + \zeta'^2\zeta''} = \frac{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}}{\zeta''} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Nun beachten wir, daß die Schmiegungsebene in P an Γ und die Berührungsebene an die Zylinderfläche daselbst bezw. die Gleichungen haben

$$\begin{vmatrix} x - \xi & y - \eta & z - \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{x - \xi}{\xi'} = \frac{y - \eta}{\eta'}.$$

Ist also ϑ der Winkel, den sie miteinander bilden, so ist

$$\cos\vartheta = \frac{\eta'(\eta'\zeta'' - \eta''\zeta') - \xi'(\zeta'\xi'' - \zeta''\xi')}{\sqrt{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2}\,\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}} = \frac{\zeta''(\xi'^2 + \eta'^2) - \zeta'(\xi'\xi'' + \eta'\eta'')}{\sqrt{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2}\,\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}}$$

$$= \frac{\zeta''(1 - \zeta'^2) + \zeta'^2\zeta''}{\sqrt{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2}\,\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}}, \qquad \text{d. h.}$$

$$\cos\vartheta = \frac{\zeta''}{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}\,\sqrt{\xi''^2 + \eta''^2 + \xi''^2}} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Vergleichen wir nun die (4), (5) und (6) miteinander, so ergibt sich

$$\cos\vartheta = \frac{R}{[R]}, \qquad \text{oder} \qquad \mathbf{[R] = \frac{R}{\cos\vartheta}} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

eine bemerkenswerte Beziehung, die ausgedrückt wird durch folgenden **Satz von Catalan: Wickelt man eine Zylinderfläche mit einer darauf beschriebenen Raumkurve Γ ab, so entsteht eine ebene Kurve $[\Gamma]$, und das Verhältnis der Krümmungsradien in entsprechenden Punkten P, $[P]$ ist gleich dem Kosinus des Winkels, den die Schmiegungsebene an Γ mit der Berührungsebene an die Fläche in P bildet.**

Aus (7) folgt: $[R]$ wird unendlich groß, wenn $\cos\vartheta = 0$, oder $\theta = \frac{\pi}{2}$, d. h. wenn die Schmiegungsebene senkrecht zur Berührungsebene wird, also durch die Flächennormale geht. Eine Kurve, bei der dies für alle Punkte zutrifft, muß sich bei der Abwicklung in eine Gerade verwandeln, sie heißt dann eine **Schraubenlinie des Zylinders** (in Übereinstimmung mit der in Nr. 216 für den Kreiszylinder gebrauchten Bezeichnung). — Nehmen wir insbesondere an, daß Γ der Schnitt der Zylinderfläche mit einer beliebigen Ebene σ sei. Wenn nun $R = \infty$, so ist (auch im allgemeinen) ebenfalls $[R] = \infty$, also gehen die Wendepunkte der Schnittkurve in Wendepunkte der Abwicklung über; aber auch wenn $[R]$ endlich ist, kann $[R] = \infty$ werden, nämlich wenn $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, also wenn σ senkrecht zur Berührungsebene β im Punkte P an die Fläche ist. Da nun letztere durch die (zu Oz parallele) Erzeugende geht, und diese zur xy-Ebene π senkrecht ist, so ist auch β senkrecht zu π; die Schnittgerade $\beta\sigma$ ist also eine Gerade größter Neigung — eine Fall-

linie — von σ in bezug auf π, zugleich ist sie aber auch Tangente an Γ in P. Also kann man aussprechen den folgenden

Satz von Olivier: Schneidet man eine Zylinderfläche mit einer beliebigen Ebene σ und einer zu den Erzeugenden senkrechten Ebene π und wickelt das zwischenliegende Mantelstück in eine Ebene ab, so hat die krumme Begrenzungslinie überall da Wendepunkte, wo die Schnittkurve in σ Tangenten hatte, die Fallinien in bezug auf π waren.

262. Wir wollen nun zeigen, wie man die Abwicklung einer in Orthogonalprojektion dargestellten Zylinderfläche bewerkstelligen kann. Als Grundebene nehmen wir eine zu den Erzeugenden senkrechte Ebene, und als Basis des Zylinders die Schnittkurve Δ mit dieser Ebene; der Aufriß wird dann von den Geraden a'', b'', ... begrenzt, die senkrecht zur Grundlinie stehen und Δ in A', B' ... berühren. Ist nun Δ eine geschlossene Kurve von der Länge l, so wird die Abwicklung einen Streifen darstellen von der Breite l; indem wir diesen in die Aufrißebene legen und uns die Fläche etwa längs der Geraden a aufgeschnitten denken, so wird der Streifen von der Geraden a'' begrenzt werden, deren Fußpunkt wir mit D bezeichnen Es sei nun $M \equiv (M', M'')$ ein beliebiger Punkt der Zylinderfläche, und g die durch ihn gehende Erzeugende, dann fällt g' mit M' zusammen, g'' geht senkrecht zur Grundlinie durch M''. Die Abwicklung $[M]$ liegt dann sowohl auf der durch M'' zur Grundlinie gezogenen Parallelen, als auch auf $[g]$; diese ist aber eine Parallele zu a'', in einem Abstande gleich der Länge des Bogens $A'M'$ der Kurve Δ, die entweder exakt oder durch ein Näherungsverfahren gefunden werden kann. Durch Umkehrung der Konstruktion kann man auch umgekehrt aus einem vorher angegebenen Punkte $[M]$ der Abwicklung den zugehörigen Punkt M der Zylinderfläche finden; läßt man beispielsweise $[M]$ eine Gerade durchlaufen, so bekommt man eine allgemeine Schraubenlinie im Aufriß. Es soll nun dies Verfahren angewendet werden auf den ebenen Schnitt Σ eines Zylinders, dessen Basis Δ beispielsweise eine Pascalsche Schnecke ist. Wir legen die Aufrißebene so, daß sie zu der schneidenden Ebene $\sigma \equiv [t_1, t_2]$ senkrecht ist; dadurch wird der Allgemeinheit kein Eintrag getan, die Konstruktion aber vereinfacht, indem Σ'' in eine Strecke $A''B''$ übergeht (s. Fig. 116).

Wir tragen nun auf Δ vom Punkte A' anfangend eine Anzahl Segmente ab, die wir zweckmäßig so klein nehmen, daß der Unterschied zwischen Sehne und Bogen vernachlässigt werden darf; die Endpunkte seien $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ ... Dieselben Strecken tragen wir vom Punkte D anfangend auf der Grundlinie nacheinander ab, wodurch wir die Punkte P_1, P_2, P_3 ... erhalten. Die in diesen Punkten zur Grundlinie errichteten Senkrechten treffen die durch $1''$, $2''$, $3''$ ... zu

ihr gezogenen Parallelen in den gesuchten Punkten [1], [2], [3]... von [Σ]. Die Wendepunkte von [Σ] ergeben sich dabei leicht aus

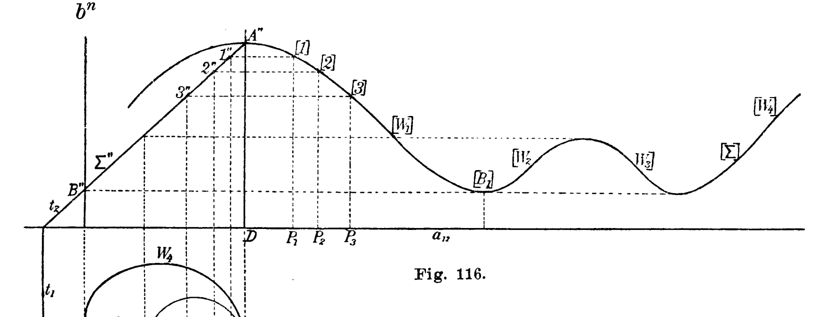


Fig. 116.

dem Olivierschen Satze, wenn man die zu t_1 senkrechten Tangenten an Δ zieht; den Berührungspunkten $W_1 \ldots W_4$ entsprechen dann die Wendepunkte $[W_1] \ldots [W_4]$. Dagegen entsprechen den Berührungspunkten der zu t_1 parallelen Tangenten, die Maximal- bzw. Minimalpunkte A'', $[B_1]$ ....

Die Kurven [Σ] sind, wenn Δ **geschlossen** ist, periodisch und im allgemeinen zusammengesetzte Schwingungskurven[1]), bei denen die Art der Schwingungen von Δ und der Lage von t_1 in bezug auf Δ abhängt, die Amplituden aber von dem Winkel, den σ mit den Erzeugenden bildet. In dem Falle des Kreiszylinders (ein schon von Aristoteles erwähnter Fall) erhalten wir immer eine einfache Sinuslinie; ist nämlich $x^2 + y^2 = r^2$ die Gleichung des Zylinders, $z = k(x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha) + l$ die schneidende Ebene, so wird Σ dargestellt durch

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi, \quad z = kr \cdot \cos(\varphi - \alpha) + l.$$

In diesem Falle werden die Gleichungen (3) zu

$$u = r\varphi, \quad v = kr \cdot \cos(\varphi - \alpha) + l$$

woraus nach Elimination von φ als Gleichung für [Σ] folgt

$$\frac{v - l}{k} = r \cdot \cos\left(\frac{u}{r} - \alpha\right),$$

welches die Gleichung einer Sinuslinie ist, womit die Behauptung bewiesen ist (vgl. Nr. 189, I).

§ 5. Abwicklung einer Kegelfläche in eine Ebene.

263. Eine beliebige Kegelfläche mit der Spitze V habe als Leitlinie die Kurve Δ. In diese denken wir uns ein konvexes Polygon $P_0 P_1 P_2 \ldots$ eingeschrieben und die entsprechenden Erzeugenden g_0, g_1,

1) G. Loria, *Spezielle alg. u. transc. ebene Kurven* II. Aufl. Bd. II, S. 16.

$g_2 \ldots$ gezogen. Nun denken wir uns die Fläche längs g_0 aufgeschnitten und lassen die Ebene des Winkels $g_0 g_1$ um g_1 sich drehen, bis sie in die des Winkels $g_1 g_2$ gelangt ist. Dann drehen wir $g_1 g_2$ um g_2, bis es in die Ebene $g_2 g_3$ gelangt ist, dann lassen wir $g_2 g_3$ sich um g_3 drehen usw. Auf diese Weise geht die körperliche Ecke V mit den Kanten $g_0, g_1, g_2 \ldots$ in eine Ebene über. Lassen wir nun die Zahl der Ecken des eingeschriebenen Polygons (und damit auch der Kanten $g_0, g_1 \ldots$) ins Unendliche wachsen, während die Länge der Seiten unendlich klein wird, so geht jene körperliche Ecke in die Kegelfläche über, und die beschriebene Operation stellt alsdann die Abwicklung der Kegelfläche in eine Ebene dar. Im Folgenden soll die Abwicklung einer Figur $\mathfrak{F}$ auf der Kegelfläche in der Ebene mit $[\mathfrak{F}]$ bezeichnet werden. Durch analoge Betrachtungen wie bei der Zylinderfläche in Nr. 261 erkennt man, daß auch **bei der Abwicklung einer Kegelfläche in eine Ebene Längen und Winkel erhalten bleiben.**[1])

264. Es soll nun eine Beziehung zwischen den Krümmungen in zwei entsprechenden Punkten einer auf dem Kegel gezeichneten Kurve Γ und ihrer Abwicklung $[\Gamma]$ in eine Ebene gesucht werden, die dem Catalanschen Satze in Nr. 261 analog ist.

Zu dem Zwecke nehmen wir als Leitkurve des Kegels eben jene Kurve Γ und als Koordinatenanfang die Spitze. Als Parameter wählen wir den Bogen s auf Γ gerechnet von dem Punkte, in dem Γ von der Erzeugenden g_0 geschnitten wird; dann werde Γ dargestellt durch

$$x = \xi(s), \quad y = \eta(s), \quad z = \zeta(s). \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Um nun $[\Gamma]$ darzustellen, nehmen wir zweckmäßig ein ebenes Polarkoordinatensystem ϱ, ω, das die Spitze als Pol hat und g_0 als Polarachse; dann lassen sich ϱ und ω als Funktionen von s, des Bogens von Γ sowohl als $[\Gamma]$ darstellen. Nun ist aber

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 \cdot d\omega^2, \quad \text{oder} \quad 1 = \varrho'^2 + \varrho^2 \omega'^2$$

oder endlich

$$\omega = \int \frac{\sqrt{1 - \varrho'^2}}{\varrho} ds. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Außerdem besteht die Gleichung

$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

folglich ist die Gleichung von $[\Gamma]$ nichts anderes als das Resultat der Elimination von s aus den Gl. (2) und (3), bzw. (2) und (3) bilden die parametrische Darstellung von $[\Gamma]$. Erinnern wir uns nun, daß

$$R = \frac{1}{\sqrt{\xi''^2 + \zeta''^2 + \eta''^2}}$$

den Krümmungsradius von Γ darstellt, und daß die Schmiegungsebene

1) Diese Größen heißen wie im Falle der Zylinderfläche **Biegungsinvarianten.**

in einem ihrer Punkte P, sowie die Tangentialebene an die Kegelfläche längs der Erzeugenden OP die Gleichungen haben

$$\begin{vmatrix} x-\xi & y-\eta & z-\zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix} = 0, \quad \text{bzw.} \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \end{vmatrix} = 0,$$

so gilt für den Winkel θ, den sie miteinander bilden

$$\cos\theta = \frac{\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix}^2}} = \tag{4}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} \xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta' & \xi\xi''+\eta\eta''+\zeta\zeta'' \\ \xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2 & \xi'\xi''+\eta'\eta''+\zeta'\zeta'' \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \xi^2+\eta^2+\zeta^2 & \xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta' \\ \xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta' & \xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2 & \xi'\xi''+\eta'\eta''+\zeta'\zeta'' \\ \xi'\xi''+\eta'\eta''+\zeta'\zeta'' & \xi''^2+\eta''^2+\zeta''^2 \end{vmatrix}}}.$$

Benutzt man nun die Identität $\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2=1$ sowie diejenigen, die sich durch Differenzieren nach s ergeben, und beachtet Gl. (3) und ihre Abgeleitete, so erhält man

$$\cos\theta = \frac{\begin{vmatrix} \xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta' & \xi\xi''+\eta\eta''+\zeta\zeta'' \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \varrho^2 & \varrho\varrho' \\ \varrho\varrho' & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi''^2+\eta''^2+\zeta''^2 \end{vmatrix}}} = -\frac{\xi\xi''+\eta\eta''+\zeta\zeta''}{\varrho\sqrt{1-\varrho'^2}\sqrt{\xi''^2+\eta''^2+\zeta''^2}}.$$

Um diesen Ausdruck noch weiter umzugestalten, beachten wir, daß aus

$$\varrho'^2+\varrho^2\omega'^2=1 \quad \text{folgt} \quad \sqrt{1-\varrho'^2}=\varrho\,\omega';$$

und da ferner

$$\varrho^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2,$$

so haben wir durch Differentiation nach s

$$\varrho\varrho'=\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta', \quad \varrho'^2+\varrho\varrho''=(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)+(\xi\xi''+\eta\eta''+\zeta\zeta''),$$

und daher

$$-(\xi\xi''+\eta\eta''+\zeta\zeta'')=1-(\varrho'^2+\varrho\varrho'').$$

Also kann man schreiben

$$\cos\theta = R\,\frac{1-\varrho'^2-\varrho\varrho''}{\varrho^2\omega'} = \frac{\varrho^2\omega'^2-\varrho\varrho''}{\varrho^2\omega'}\,R = \left(\omega-\frac{\varrho''}{\varrho\,\omega'}\right)R.$$

Der Klammerausdruck gibt aber das Krümmungsmaß $\frac{1}{R}$ im Punkte $[P]$ von $[\Gamma]$[1]) also ist

$$\cos\theta = \frac{R}{[R]}, \quad \text{oder} \quad [\boldsymbol{R}] = \frac{\boldsymbol{R}}{\cos\theta} \cdot \tag{5}$$

---

1) Zum Beweise dieser Behauptung betrachte man eine ebene Kurve Γ, die in Polarkoordinaten ϱ, ω, gegeben ist als Funktionen des Bogens s; dann ist

$$\varrho'^2+\varrho^2\omega'^2=1, \tag{α}$$

Es besteht daher auch für die Kegelflächen der **Satz von Catalan: Wickelt man eine Kegelfläche in eine Ebene ab, so ist der Krümmungsradius in einem Punkte $[P]$ der abgewickelten Kurve $[\Gamma]$ gleich dem der Kurve Γ auf dem Kegel im entsprechenden Punkte P dividiert durch den Kosinus des Winkels, den die Schmiegungsebene in P mit der Berührungsebene an den Kegel in P bildet.**

Aus (5) ergibt sich daß $[R] = \infty$ wird, wenn $\theta = \frac{\pi}{2}$, d. h. in allen den Punkten von Γ, in denen die Schmiegungsebene die Flächennormale enthält; ist dies für alle Punkte von Γ der Fall, so wird $[\Gamma]$ eine Gerade, und Γ heißt dann Kegelschraubenlinie.[1]) Nehmen wir im speziellen an, daß Γ in einer Ebene σ liege, so wird $[R] = \infty$, wenn auch $R = \infty$ ist, d. h. Wendepunkte bleiben auch nach der Abwicklung erhalten. Aber es wird auch dann $[R] = \infty$, wenn R endlich, aber $\theta = \frac{\pi}{2}$ ist, d. i. für diejenigen Punkt P, bei denen die Tangentialebene an den Kegel längs der Erzeugenden VP senkrecht zu σ steht. Um diese Punkte zu erhalten, kann man offenbar so verfahren: Man projiziere V orthogonal auf σ in V_0 und ziehe von V_0 an Γ die Tangenten; ist B einer der Berührungspunkte, so ist die Ebene VV_0B sowohl Berührungsebene an den Kegel, als auch senkrecht zu σ, B ist also einer der gesuchten Punkte.

265. Um zu zeigen, wie bei der Abwicklung der Kegelflächen die Methode der Orthogonalprojektion vorteilhaft angewendet werden kann, behandeln wir folgende

Aufgabe. Die Abwicklung einer auf einem geraden Kreiskegel gezeichneten Kurve Γ in eine Ebene zu konstruieren.

---

und wenn wir differenzieren

$$(\beta) \qquad \varrho\varrho'' + \varrho\varrho'\omega'^2 + \varrho\omega'\omega'' = 0.$$

Ist nun $\frac{1}{R}$ die Krümmung von Γ, so hat man (s. Serret, *Calcul differentiel* II éd., Paris, 1879, S. 304) $\frac{1}{R} = \omega' + \mu'$, wenn $\operatorname{tg}\mu = \frac{\varrho\omega'}{\varrho'}$. Daraus folgt dann

$$\cos^2\mu = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\mu} = \frac{1}{1+\frac{\varrho^2\omega'^2}{\varrho'^2}} = \frac{\varrho'^2}{\varrho'^2+\mu^2\omega'^2} = \varrho'^2; \quad \frac{\mu'}{\cos^2\mu} = \frac{\varrho'(\varrho\omega''+\varrho'\omega') - \varrho\omega'\varrho''}{\varrho'^2}.$$

Also ist

$$\mu' = \varrho'^2\omega' + \varrho\varrho'\omega'' - \varrho\varrho''\omega' = \varrho'^2\omega' - \varrho'\frac{\varrho'\varrho''+\varrho\varrho'\omega^2}{\varrho\omega'} - \varrho\varrho''\omega',$$

oder

$$\mu' = -\frac{\varrho''(\varrho'^2+\varrho^2\omega'^2)}{\varrho\omega'} = -\frac{\varrho''}{\varrho\omega'}.$$

Hieraus schließt man $\frac{1}{R} = \omega' - \frac{\varrho''}{\varrho\omega'}$, wie behauptet.

1) S. auch die folg. Seite.

Auflösung: Als Grundebene nehmen wir die Ebene des Basiskreises Δ in dessen Mittelpunkt das Bild V' der Spitze fällt. Ist r der Radius, h die Höhe des Kegels, so ist $s = \sqrt{h^2 + r^2}$ die Seite, und die Abwicklung des Mantels gibt einen Kreissektor vom Radius s und dem Zentriwinkel $\alpha = \frac{2r\pi}{s}\cdot$ Wir legen diesen in die Aufrißebene, so daß sein Zentrum mit V'', und der eine Begrenzungsradius mit der den Aufriß begrenzenden Seite c'' zusammenfällt; mit andern Worten wir lassen die Abwicklung mit der Erzeugenden c beginnen, deren erster Spurpunkt O' sein möge (s. Fig. 117). Es sei nun M' die erste Projektion eines Punktes M von Γ; um M'' zu finden, betrachten wir die durch M gehende Erzeugende g, $V'M'$ ist dann ihre Projektion g', und wenn diese Δ in G' schneidet, und wir loten G' als G'' auf die Achse, so ist die Gerade $V''G''$ die zweite Projektion g'', die von der Ordinate von M' in M'' geschnitten wird. Um $[M]$ zu finden konstruieren wir zunächst $[g]$. Zu dem Zwecke tragen wir auf dem schon gezeichneten Kreissektorbogen von O'' aus den Bogen $O''[G]$ gleich dem Bogen OG' ab und verbinden V'' mit $[G]$ wodurch wir $[g]$ erhalten, auf welchem $[M]$ liegen muß. Da bei der Abwicklung die Längen erhalten bleiben, so ist $V''[M] = VM$; letzteres ist aber bekannt als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks $V''HK$, dessen eine Kathete die Differenz der Koten von V und M, dessen andere der Abstand $V'M'$ ist; der um V'' mit $V''K$ beschriebene Kreis trifft dann $[g]$ in dem gesuchten Punkte $[M]$; lassen wir nun M die Kurve Γ durchlaufen, so erhalten wir $[\Gamma]$. Als Beispiel kann man für Γ einen ebenen Schnitt des Kegels wählen und der Einfachheit halber die Schnittebene senkrecht zur Aufebene nehmen, wie in unserer Figur geschehen.

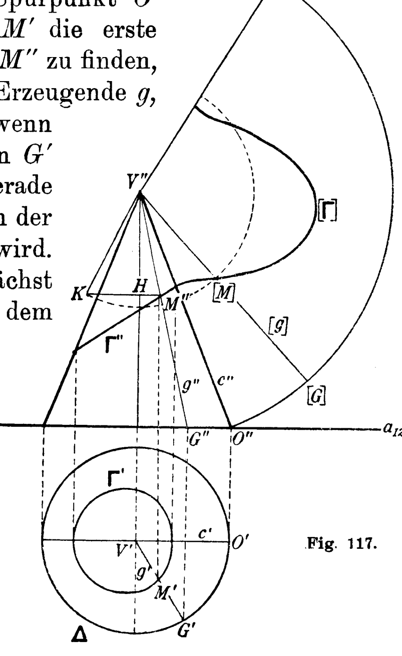


Fig. 117.

Die angeführte Konstruktion in passender Weise rückwärts durchgeführt liefert M' und M'', wenn $[M]$ gegeben ist. Der Leser möge diese ausführen für den Fall, daß der Ort von $[M]$ eine Gerade oder eine log. Spirale mit V'' als Pol sei: er gelangt dann zur Darstellung der sog. geraden Kegelschraubenlinie (s. vor. Seite) oder zur Loxodrome einer geraden Kreiskegelfläche[1]).

1) Als drittes Analogon zur gemeinen Zylinderschraubenlinie für den Kreis-

Viertes Kapitel.

Regelflächen.

1. Teil. Abwickelbare Flächen.

§ 1. Allgemeine Eigenschaften.

266. Das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid sind Flächen, die ohne konisch oder zylindrisch zu sein, dennoch eine einfach unendliche Folge von Geraden enthalten: sie führen naturgemäß auf die Betrachtung solcher Flächen, die durch eine reelle Gerade erzeugt werden, die sich im Raume bewegend eine einfach unendliche Folge von Lagen einnimmt. Solche Flächen heißen Regelflächen, und die ∞^1 in ihr enthaltenen Geraden ihre Erzeugenden. Zieht man durch einen Punkt des Raumes zu sämtlichen Erzeugenden die Parallelen, so bilden diese den Leitkegel der Regelfläche.

Eine beliebige Erzeugende g der Regelfläche $\mathfrak{R}$ kann in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten dargestellt werden durch eine Gleichung vom Typus
$$\frac{x-\xi}{\varphi} = \frac{y-\eta}{\chi} = \frac{z-\zeta}{\psi},$$
wo die ξ, η, ζ die Koordinaten eines beliebigen auf g gelegenen Punktes sind φ, χ, ψ Größen, die den Richtungskosinussen von g proportional sind. Bewegt sich nun g im Raume ∞^1 Lagen einnehmend, so werden jene sechs Größen (statt konstant zu bleiben) Funktionen einer unabhängigen Variabeln t werden, so daß man die ∞^1 Erzeugenden von $\mathfrak{R}$ darstellen kann durch
$$\frac{x-\xi(t)}{\varphi(t)} = \frac{y-\eta(t)}{\chi(t)} = \frac{z-\zeta(t)}{\psi(t)}. \qquad (1)$$
Hieraus folgt, daß man zur Darstellung von $\mathfrak{R}$ auch die folgende parametrische nehmen kann
$$x = \xi(t) + u\varphi(t), \quad y = \eta(t) + u \cdot \chi(t), \quad z = \zeta(t) + u \cdot \psi(t), \qquad (2)$$
worin t und u die Parameter sind. Wir setzen stets voraus, daß $\varphi, \chi, \psi, \xi, \eta, \zeta$ analytische Funktionen von t seien. Derjenige Punkt der Erzeugenden (t), der dem Werte $u = 0$ entspricht, kann als Anfangspunkt bezeichnet werden. Wenn die Funktionen φ, ψ, χ identisch der Gleichung
$$\overline{\varphi(t)}^2 + \overline{\chi(t)}^2 + \overline{\psi(t)}^2 = 1$$

---

kegel könnte man auch betrachten die Bahn eines Punktes, der vom Scheitel beginnend sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer Erzeugenden bewegt, während diese gleichförmig auf dem Kegel rotiert die sog. konische Spirale; der Grundriß würde dann eine archimedische Spirale darstellen, während die Kegelloxodrome eine log. Spirale, die Kegelschraube eine spezielle Sinusspirale (Lampesche Sektrix; Loria, *Spez. Kurven* Bd. I, S. 409) als Grundriß hat.



genügen, so bedeuten sie die Richtungskosinusse der Erzeugenden (t), und u gibt den Abstand des Punktes (t, u) vom Anfangspunkt an.

267. Wir betrachten die beiden den Werten t und $t+h$ entsprechenden Erzeugenden von $\mathfrak{R}$; diese liegen dann und nur dann in derselben Ebene, wenn

$$\begin{vmatrix} \xi(t) & \eta(t) & \zeta(t) & 1 \\ \varphi(t) & \chi(t) & \psi(t) & 0 \\ \xi(t+h) & \eta(t+h) & \zeta(t+h) & 1 \\ \varphi(t+h) & \chi(t+h) & \psi(t+h) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder, wenn

$$\begin{vmatrix} \xi(t) & \eta(t) & \zeta(t) & 1 \\ \varphi(t) & \chi(t) & \psi(t) & 0 \\ \xi(t+h)-\xi(t) & \eta(t+h)-\eta(t) & \zeta(t+h)-\zeta(t) & 0 \\ \varphi(t+h)-\varphi(t) & \chi(t+h)-\chi(t) & \psi(t+h)-\psi(t) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Nehmen wir nun an, daß h eine sehr kleine Größe sei, und bedeuten $\theta_1, \ldots, \vartheta_3$ Größen, die zwischen 0 und 1 liegen, so können wir auch schreiben

$$\begin{vmatrix} \varphi(t) & \chi(t) & \psi(t) \\ \xi'(t+\theta_1 h) & \eta'(t+\theta_2 h) & \zeta'(t+\theta_3 h) \\ \varphi'(t+\vartheta_1 h) & \chi'(t+\vartheta_3 h) & \psi'(t+\vartheta_2 h) \end{vmatrix} = 0.$$

Lassen wir nun h gegen Null konvergieren, so folgt

$$\begin{vmatrix} \varphi(t) & \chi(t) & \psi(t) \\ \xi'(t) & \eta'(t) & \zeta'(t) \\ \varphi'(t) & \chi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Nun können sich zwei Fälle darbieten: 1. In diese Gleichung tritt t tatsächlich ein; alsdann entspricht jeder Wurzel t von (3) eine Erzeugende von $\mathfrak{R}$, die dann in einem Punkte (den man den Scheitel nennt) von der folgenden Erzeugenden geschnitten wird, jede solche Erzeugende wollen wir, die Cayleysche Bezeichnung annehmend, eine torsale nennen. 2. Die Gl. (3) wird identisch befriedigt; dann findet dies für alle Erzeugenden von $\mathfrak{R}$ statt[1]), und diese heißt dann (aus Gründen, die wir alsbald angeben werden) eine abwickelbare Regelfläche.

Setzen wir das letztere voraus, und daß also die Gl. (2) eine abwickelbare Fläche darstellen: dann läßt sich auf jeder Erzeugenden (t) als Punkt (ξ, η, ζ) derjenige wählen, in welchem g von der folgen-

1) Dies trifft auch für Kegel- und Zylinderflächen zu, wie wir wissen.

den Erzeugenden $g' \equiv (t + dt)$ geschnitten wird. Nehmen wir an, daß du der Wert von u sei, der dem Punkte gg' genommen auf g' entspreche, so müssen drei Identitäten von folgendem Typus bestehen

$$\begin{cases} \xi(t) = \xi(t+dt) + du \cdot \varphi(t+dt), \quad \eta(t) = \eta(t+dt) + du \cdot \chi(t+dt), \\ \zeta(t) = \zeta(t+dt) + du \cdot \psi(t+dt), \end{cases}$$

oder

$$\xi'(t)dt + \varphi(t)du = 0, \quad \eta'(t)dt + \chi(t)du = 0, \quad \zeta'(t)dt + \psi(t)du = 0.$$

Damit diese zugleich bestehen, ist nötig:

$$\frac{\varphi(t)}{\xi'(t)} = \frac{\chi(t)}{\eta'(t)} = \frac{\psi(t)}{\zeta'(t)}.$$

Infolge der Gl. (1) werden diese nun zu

$$\frac{x - \xi(t)}{\xi'(t)} = \frac{y - \eta(t)}{\eta'(t)} = \frac{z - \zeta(t)}{\zeta'(t)}, \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

und aus diesen folgt dann folgende Darstellung der abwickelbaren Fläche $\mathfrak{R}$

$$x = \xi(t) + u \cdot \xi'(t), \quad y = \eta(t) + u \cdot \eta'(t), \quad z = \zeta(t) + u \cdot \zeta'(t). \quad (5)$$

Beachten wir nun die Darlegungen in Nr. 194, so sagen uns diese Gleichungen: **Die Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche sind zugleich die Tangenten einer Raumkurve.** Diese Kurve heißt die **Rückkehrkante** der abwickelbaren Flächen, da jeder ihrer ebenen Schnitte auf dieser Kurve einen Rückkehrpunkt (Spitze) hat (S. 103). So sind wir zu den Gebilden zurückgeführt, denen wir schon im Kap. II des vorigen Buches begegneten, indem wir ausgingen von einer Folge von ∞^1 Punkten oder ∞^1 Ebenen.

Aus den Gl. (5) ergibt sich nun, daß die Berührungsebene in einem beliebigen Punkte von $\mathfrak{R}$ die Gleichung hat

$$\begin{vmatrix} x - \xi(t) - u \cdot \xi'(t) & y - \eta(t) - u \cdot \eta'(t) & z - \zeta(t) - u \cdot \zeta'(t) \\ \xi'(t) & \eta'(t) & \zeta'(t) \\ \xi'(t) + u \cdot \xi''(t) & \eta'(t) + u \cdot \eta''(t) & \zeta'(t) + u \cdot \zeta''(t) \end{vmatrix} = 0,$$

oder einfacher

$$\begin{vmatrix} x - \xi(t) & y - \eta(t) & z - \zeta(t) \\ \xi'(t) & \eta'(t) & \zeta'(t) \\ \xi''(t) & \eta''(t) & \zeta''(t) \end{vmatrix} = 0$$

und diese zeigt uns: **Die Berührungsebenen einer abwickelbaren Fläche sind zugleich die Schmiegungsebenen ihrer Rückkehrkante.** Da in die zuletzt geschriebene Gleichung u nicht mehr eintritt, **so hat die Abwickelbare in allen Punkten einer Erzeugenden dieselbe Berührungsebene**, eine Eigenschaft, die auch den Kegel- und Zylinderflächen zukommt (Nr. 252).

Kombinieren wir die Gl. (5) mit den Gl. (11″) in Nr. 225, so folgt: **Eine abwickelbare Fläche enthält** (ebenso wie die Zylinder- und Kegelflächen) **nur parabolische Punkte.**

268. Eine abwickelbare Regelfläche $\mathfrak{R}$ (als Erzeugnis von ∞^1 Ebenen betrachtet) kann auch als durch die Berührungsebenen zweier Flächen erzeugt gedacht werden (also von diesem Standpunkte aus als dual zur Schnittkurve zweier Flächen), oder einer Kurve und einer Fläche, oder (wie wir schon in Nr. 197 gesehen haben) zweier Kurven. Die letzteren kann man immer auch als zwei ebene Kurven annehmen, also als zwei ebene Schnitte der Fläche. Bei dieser Voraussetzung kann die Fläche, wie folgt, erzeugt werden: man betrachte eine Tangente c einer der gegebenen Kurven und ihren Schnittpunkt mit der Ebene der anderen; aus diesem Punkte ziehe man eine Tangente d an die andere Kurve: die Ebene cd gehört zur abwickelbaren Fläche.

Die einfachste graphische Darstellung einer abwickelbaren Regelfläche $\mathfrak{R}$ erhält man, wenn man diese auffaßt als durch die Tangenten einer Raumkurve Γ erzeugt. Benutzt man z. B. Orthogonalprojektion, so kann man sich Γ bestimmt denken durch die Projektionen Γ' und Γ''; die Tangenten von Γ sind dann die Erzeugenden g von $\mathfrak{R}$. Ist nun z. B. die Projektion P' eines Punktes P von $\mathfrak{R}$ gegeben, so ziehe man von P' an Γ' die Tangente g', die in G' berührt, nun findet man (wenn die Zuordnung der Punkte der Kurven Γ', Γ'' bekannt ist) leicht G'' auf Γ'' und zieht dann an Γ'' die Tangente g'' in G''; sie wird dann von der Ordinate von P' in P'' getroffen.

Zur Übung. In Orthogonalprojektion darzustellen die Abwickelbare, die als Leitlinien hat, 1. eine in der Grundebene gelegene Ellipse mit den Halbachsen a und b, von denen die eine parallel zur Grundlinie ist, und 2. einen Kreis vom Radius r, dessen Ebene parallel zur Grundebene ist, und dessen Mittelpunkt senkrecht über dem Mittelpunkte der Ellipse im Abstande h liegt.

§ 2. Abwickelung einer Regelfläche auf eine Ebene.

269. Auf der Rückkehrkante Σ der abwickelbaren Regelfläche $\mathfrak{R}$ denken wir uns benachbarte Punkte mit $P_0, P_1, P_2 \ldots$ bezeichnet und die Geraden $P_0P_1 \equiv r_1$, $P_1P_2 \equiv r_2 \ldots$ gezogen, sowie die Ebenen $P_0P_1P_2$, $P_1P_2P_3, \ldots$ gelegt; dann entsteht eine polyedrische Fläche, die, wenn die Streifen P_0P_1, $P_1P_2 \ldots$ unendlich klein werden, in die Fläche $\mathfrak{R}$ übergeht, wobei die Geraden $r_1, r_2 \ldots$ in die Erzeugenden übergehen. Wir denken uns nun diese polyedrische Fläche längs der Geraden r_0 aufgeschnitten; dann können wir die Ebene r_0r_1 um r_1 drehen, bis sie mit der Ebene r_1r_2 zusammenfällt, dann drehen wir diese um r_2 bis diese mit r_2r_3 in eine Ebene fällt, und so fahren wir fort, bis alle Ebenen in eine einzige fallen. Diese Operation führt dann, wenn der Polygonzug $P_0P_1P_2 \ldots$ in die Kurve Σ übergeht zur

Abwickelung der Regelfläche in eine Ebene; damit erklärt und rechtfertigt sich die Bezeichnung abwickelbar, mit der wir die hier betrachteten Flächen belegen. Ähnlich, wie wir es für die Kegel- und Zylinderflächen gezeigt, ergibt sich, **daß bei der Abwickelung der Regelflächen Längen und Winkel erhalten bleiben.** Noch eine weitere Eigenschaft können wir hinzufügen. Wir betrachten auf Σ zwei Punkte P_0, P_1 und die zugehörigen Tangenten t_0 und t_1, dann geht (vgl. Nr. 183) das Verhältnis $\frac{\sphericalangle(t_0 t_1)}{\text{Bogen } P_0 P_1}$ in das Krümmungsmaß $\frac{1}{r}$ über, wenn P_1 sich P_0 unendlich nähert; $\frac{1}{r}$ wird das Verhältnis zwischen dem unendlich kleinen Winkel, den die entsprechende Erzeugende mit der folgenden bildet, und dem unendlich kleinen Bogen bei P_0. Indem nun diese beiden Größen bei der genannten Operation sich nicht ändern, **so behält bei der Abwickelung einer Regelfläche die Rückkehrkante in allen Punkten ihre Krümmung bei.** Ist z. B. Σ eine gemeine Zylinderschraubenlinie, so hat diese ja konstante Krümmung, also wird auch $[\Sigma]$ eine Kurve von konstanter Krümmung sein, d. i. ein Kreis.

270. Wir wollen annehmen, daß im allgemeinen zur analytischen Darstellung der Kurve Σ die Gleichungen gegeben seien

$$x = \xi(s), \qquad y = \eta(s), \qquad z = \zeta(s),$$

worin s, wie üblich, den Bogen bedeutet; dann haben wir

$$r = \frac{1}{\sqrt{\xi''(s)^2 + \eta''(s)^2 + \zeta''(s)^2}}.$$

Für die Abwickelung $[\Sigma]$ bleiben nun s und die Krümmung unverändert, also liefert die letzte Gleichung auch den Krümmungsradius für $[\Sigma]$ in Funktionen des Bogens, $[\Sigma]$ ist also (s. Nr. 183) ihrer Größe und Gestalt nach vollständig bestimmt, nur nicht nach ihrer Lage. In bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem Ωu, Ωv könnte man sie (S. 73) in folgender Weise darstellen

$$u = \int \cos\left(\int \frac{ds}{r}\right) \cdot ds, \qquad v = \int \sin\left(\int \frac{ds}{r}\right) \cdot ds. \quad . \quad . \quad (6)$$

Betrachten wir nun einen Punkt P der Abwickelbaren $\mathfrak{R}$ und die durch ihn gehende Erzeugende g, sowie den Berührungspunkt S mit der Kurve Σ, so stellt, wenn

$$x = \xi(s) + t \cdot \xi'(s), \qquad y = \eta(s) + t \cdot \eta'(s), \qquad z = \zeta(s) + t \cdot \zeta'(s) \qquad (7)$$

die parametrische Darstellung von $\mathfrak{R}$ ist, t die Länge der Strecke SP dar. Nach der Abwickelung wird $[P]$ ein Punkt der Geraden $[g]$, die $[\Sigma]$ in $[S]$ berührt, und es ist $\overline{[S][P]} = \overline{SP} = t$. Sind nun $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ die Koordinaten von $[P]$, so haben wir, wie die Figur sogleich zeigt,

$$\mathfrak{U} = u + t \cdot \frac{du}{ds}, \qquad \mathfrak{V} = v + t \cdot \frac{dv}{ds},$$

oder wegen Gl. (6)

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \int \cos\left(\int \frac{ds}{r}\right) ds + t\cdot\cos\left(\int\frac{ds}{r}\right),\\ \mathfrak{B} &= \int \sin\left(\int \frac{ds}{r}\right) ds + t\cdot\sin\left(\int\frac{ds}{r}\right).\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Diese Formeln geben die Koordinaten von $[P]$, bestimmen also die Lage, die der Punkt P nach der Abwickelung einnimmt. Durchläuft P eine Kurve Γ, deren Gleichung $t = \varphi(s)$ ist, so beschreibt der entsprechende $[P]$ eine Kurve, die folgender parametrischer Darstellung fähig ist:

$$\mathfrak{A} = \int \cos\left(\int \frac{ds}{r}\right)\cdot ds + \omega(s)\cdot\cos\left(\int\frac{ds}{r}\right),$$
$$\mathfrak{B} = \int \sin\left(\int \frac{ds}{r}\right)\cdot ds + \omega(s)\sin\left(\int\frac{ds}{r}\right).$$

271. Es entsteht nun die Frage, ob auch für die Regelflächen ein ähnlicher Satz, wie der Catalansche für die Zylinderflächen (Nr. 261) und Kegelflächen (Nr. 264) besteht. Zur Beantwortung dieser Frage nehmen wir die Gl. (7) und (8) und nehmen an, daß t eine bestimmte Funktion von s sei. Die Ableitungen nach s bezeichnen wir durch Strichel und setzen zur Abkürzung

$$\varphi = \int \frac{ds}{r}, \quad \text{oder} \quad \varphi' = \frac{1}{r}.$$

Mit $d\sigma$ wollen wir ferner den Wert des Bogendifferentials der durch (7) dargestellten Kurve Γ (natürlich vor und nach der angenommenen Abwickelung) bezeichnen. Differenzieren wir die Gl. (8), so folgt

$$\mathfrak{A}' = (1 + t')\cos\varphi - \frac{t}{r}\sin\varphi, \qquad \mathfrak{B}' = (1 + t')\sin\varphi + \frac{t}{r}\cos\varphi,$$

folglich

$$\mathfrak{A}'^2 + \mathfrak{B}'^2 = \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = (1 + t')^2 + \frac{t^2}{r^2}.$$

Differenzieren wir von neuem, so erhalten wir

$$\mathfrak{A}'' = \left(t'' - \frac{t}{r^2}\right)\cos\varphi - \left[\frac{1 + t'}{r} + \left(\frac{t}{r}\right)'\right]\sin\varphi,$$
$$\mathfrak{B}'' = \left(t'' - \frac{t}{r^2}\right)\sin\varphi + \left[\frac{1 + t'}{r} + \left(\frac{t}{r}\right)'\right]\cos\varphi;$$

und daher ist

$$\begin{vmatrix}\mathfrak{A}' & \mathfrak{B}' \\ \mathfrak{A}'' & \mathfrak{B}''\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + t' & \frac{t}{r} \\ t'' - \frac{t}{r^2} & \frac{1+t'}{r} + \left(\frac{t}{r}\right)'\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}$$
$$= \frac{(1 + t')^2}{r} + (1 + t')\left(\frac{t}{r}\right)' - \frac{tt''}{r} + \frac{t^2}{r^3}.$$

Die Krümmung der Kurve $[\Gamma]$ wird also gegeben durch

$$\frac{1}{[R]} = \frac{\frac{(1+t')^2}{r} + (1+t')\left(\frac{t}{r}\right)' - \frac{tt''}{r} + \frac{t^2}{r^2}}{\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$(1+t')^2 + (1+t')\frac{rt' - r't}{r} - tt'' + \frac{t^2}{r^2}$$

d. h.
$$1 + 3t' + 2t'^2 - \frac{tr'(1+t')}{r} - tt'' + \frac{t^2}{r^2} = M,$$

so können wir kurz schreiben

$$\frac{1}{[R]} = \frac{M}{r\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^3}.$$

Für die ursprüngliche Kurve Γ erhält man die Krümmung, durch Benutzung von Gl. (9′) in Nr. 196 und der Gl. (7). Setzt man der Kürze wegen [(**10**)

$$N = \sqrt{\left|\begin{matrix} (1+t')\xi' + t\xi'', & (1+t')\eta' + t\eta'', & (1+t')\zeta' + t\zeta'' \\ t''\xi' + (1+2t')\xi'' + t\xi''', & t''\eta' + (1+2t')\eta'' + t\eta''', & t''\zeta' + (1+2t')\zeta'' + t\zeta''' \end{matrix}\right|^2}$$

so findet man
$$\frac{1}{R} = \frac{N}{\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^3},$$

die mit der vorigen verglichen zeigt, daß

$$\frac{R}{[R]} = \frac{M}{rN} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Nun haben die Schmiegungsebenen in zwei entsprechenden Punkten der Rückkehrkante und der Kurve Γ die Gleichungen

$$\begin{vmatrix} x-\xi & y-\eta & z-\zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-(\xi+t\xi'), & y-(\eta+t\eta'), & z-(\zeta+t\zeta'), \\ (1+t')\xi'+t\xi'', & (1+t')\eta'+t\eta'', & (1+t')\zeta'+t\zeta'', \\ t''\xi'+(1+2t')\xi''+t\xi''', & t''\eta'+(1+2t')\eta''+t\eta''', & t''\zeta'+(1+2t')\zeta''+t\zeta''' \end{vmatrix} = 0.$$

Ist daher θ der Winkel, den sie miteinander bilden, so folgt (vgl. 11)

$$\cos\theta = \frac{\begin{vmatrix} 1+t' & t'' + t(\xi'\xi''' + \eta'\eta''' + \zeta'\zeta''') \\ \frac{t}{r^2} & \frac{1+2t'}{r^2} + t(\xi''\xi''' + \eta''\eta''' + \zeta''\zeta''') \end{vmatrix}}{N\sqrt{\begin{vmatrix} \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 & \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' \\ \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' & \xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 \end{vmatrix}}}.$$

Da aber identisch

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1,$$

und

$$\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = \frac{1}{r^2},$$

so folgt

$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = 0, \qquad \xi'\xi''' + \eta'\eta''' + \zeta'\zeta''' = -\frac{1}{r^2},$$

und

$$\xi''\xi''' + \eta''\eta''' + \zeta''\zeta''' = -\frac{r'}{r^2}.$$

Daher kann man einfacher schreiben:

$$\cos\theta = \frac{\begin{vmatrix} 1+t' & t'' - \frac{t}{r^2} \\ \frac{t}{r^2} & \frac{1+2t'}{r^2} - \frac{tr'}{r^3} \end{vmatrix}}{\frac{N}{r}} = \frac{\begin{vmatrix} 1+t' & t'' - \frac{t}{r^2} \\ t & 1+2t' - \frac{tr'}{r^2} \end{vmatrix}}{Nr}.$$

Entwickelt man den Nenner, so wird er zu

$$1 + 3t' + 2t'^2 - \frac{tr'(1+t')}{r} - tt'' + \frac{t^2}{r^2},$$

oder wegen des zweiten Ausdruckes für M

$$\cos\theta = \frac{M}{rN}$$

und diese Beziehung verglichen mit (11) zeigt, daß

$$\cos\theta = \frac{R}{[R]}, \quad \text{oder} \quad [R] = \frac{R}{\cos\theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Demnach besteht für alle hier behandelten Flächen der

Satz von Catalan: Wickelt man eine abwickelbare Regelfläche in eine Ebene ab, so ist das Verhältnis des Krümmungsradius einer Kurve auf der Fläche zu dem Krümmungsradius in dem entsprechenden Punkte der abgewickelten Kurve gleich dem Kosinus des Winkels, den die Schmiegungsebene an die Kurve und die Berührungsebene an die Fläche in jenem Punkte mit einander bilden.[1])

Die Punkte, in denen jene beiden Ebenen zueinander senkrecht stehen, werden in der abgewickelten Kurve zu Wendepunkten; geschieht das überall, so wird die gegebene Kurve nach der Abwickelung eine Gerade und heißt dann geodätische Linie.

272. Es soll nun an einem Beispiele gezeigt werden, wie die in Nr. 270 dargelegten Begriffe die Abwickelung einer solchen Fläche graphisch und zwar in Orthogonalprojektion ermöglichen.

1) E. Catalan, *Théorèmes sur les surfaces développables* (Comptes rendus etc. T. XVIII, Paris 1843, p. 738).

Aufgabe. Gegeben eine Kreiszylinder-Schraubenlinie Σ als Rückkehrkante einer abwickelbaren Regelfläche $\mathcal{S}$ und eine Ebene τ, die $\mathcal{S}$ in der Kurve Γ schneidet: es soll die Abwickelung $[\Gamma]$ von Γ in eine Ebene konstruiert werden.

Auflösung. Die Schraubenlinie Σ sei in Grundriß durch den Basiskreis Σ' des zugehörigen Zylinders, im Aufriß durch die Sinuslinie Σ'' gegeben; die Ebene τ durch ihre Spuren t_1 und t_2. Für alle Punkte P von Σ können wir (nach einem schon angeführten Verfahren) die beiden Projektionen g' und g'' der entsprechenden Erzeugenden konstruieren. Wir ermitteln dann deren Schnitte P_0 mit τ; führen wir dies für alle Punkte P durch, so erhalten wir die Projektionen Γ' und Γ'' der Schnittkurve. Wickeln wir nun $\mathcal{S}$ in die Zeichenebene ab, so verwandelt sich Σ in einen Kreis $[\Sigma]$ (vgl. S. 222) mit dem beliebig zu wählenden Zentrum C und (s. S. 135) dem Radius $r = \frac{\mathsf{R}^2 + \mathsf{H}^2}{\mathsf{R}}$, wo $\mathsf{H} = \frac{h}{2\pi}$ die reduzierte Steighöhe der Schraubenlinie ist.

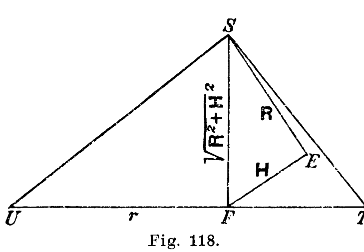


Fig. 118.

Um r geometrisch zu konstruieren, zeichnen wir zuerst ein rechtwinkliges Dreieck EFS (Fig. 118) mit den Katheten R und H; dann errichten wir im Endpunkte F der Hypotenuse die Senkrechte $FT = \mathsf{R}$, verbinden T mit S und errichten in S auf TS die Senkrechte, die TF in U schneidet. Dann ist

$$\overline{SF}^2 = FT \cdot FU \quad \text{oder} \quad \mathsf{R}^2 + \mathsf{H}^2 = \mathsf{R} \cdot FU,$$

weshalb $FU = r$. Nun nehmen wir auf der Peripherie von $[\Sigma]$ beliebig den Punkt $[O]$, der dem Anfangspunkte O der Schraubenlinie entsprechen soll; ist nun $[P]$ der dem Punkte P entsprechende Punkt, so müssen die Bogen $[O][P]$ und $O'P'$ einander ähnlich sein, woraus sich $[P]$ leicht ergibt. Die Tangente $[g]$ an $[\Sigma]$ in $[P]$ ist dann die Abwickelung der Erzeugenden g; tragen wir alsdann auf $[g]$ in einem bestimmten Richtungssinne die Strecke $[P][P_0] = PP_0$ ab, so haben wir den Punkt $[P_0]$; der Ort dieser Punkte ist dann die gesuchte Kurve $[\Gamma]$.

2. Teil. Windschiefe Regelflächen.

§ 1. Allgemeine Eigenschaften.

273. Wir wollen jetzt annehmen, daß für die durch Gl. (2) in Nr. 266 parametrisch dargestellte Regelfläche die Gleichung (3) nicht identisch erfüllt sei; dann ist die Fläche nicht abwickelbar und sie heißt dann eine windschiefe Regelfläche.

Satz. Eine Regelfläche entsteht durch Bewegung einer reellen Geraden, der Erzeugenden, im Raume, derart, daß sie stets drei be-

liebige, ebene oder räumliche Linien Γ_1, Γ_2, Γ_3 trifft, welche die Leitlinien (Direktrix) der Fläche heißen.

Beweis. Nehmen wir z. B. auf Γ_1 den Punkt P_1 beliebig und projizieren von ihm aus die beiden anderen Leitlinien, so erhalten wir zwei Kegel mit gemeinsamer Spitze; die ihnen gemeinsamen Erzeugenden, gehören, da sie ja alle drei Linsen treffen, der besagten Fläche an; variieren wir P_1 auf Γ_1, so erhalten wir die ganze Fläche. Um sich zu überzeugen, daß diese im allgemeinen nicht abwickelbar ist, betrachten wir eine Erzeugende g, die die Leitlinien in P_1, P_2, P_3 trifft; ist nun g' die nächstfolgende Erzeugende, und wäre die Fläche abwickelbar, so würden g und g' eine Ebene bestimmen, und diese würde dann auch die Tangenten an die Kurven Γ_1, Γ_2, Γ_3 in den Punkten P_1, P_2, P_3 enthalten müssen; nun liegen im allgemeinen diese drei Tangenten nicht in einer Ebene, also ist die Fläche nicht abwickelbar.[1])

Umgekehrt läßt sich jede Regelfläche in der angegebenen Weise auf unendlich viele Arten erzeugen; z. B. kann man als Leitlinien drei beliebige ihrer ebenen Schnitte annehmen, insbesondere die, welche auf den drei Grundebenen liegen; auch kann man einen dieser Schnitte als im Unendlichen gelegen annehmen und die beiden anderen z. B. als Fundamentalebenen eines Mongeschen Systems wählen.

Die Beweismethode des vorigen Satzes kann auch angewandt werden, um zu zeigen, daß **auch alle Geraden, die durch zwei Raumkurven gehen und eine Fläche berühren, oder durch eine Kurve gehen und zwei Flächen berühren, eine Regelfläche bilden.**[2])

Der vorige Satz bietet viele besondere Fälle, von denen einige erwähnt zu werden verdienen:

a) Eine der Leitlinien kann im Unendlichen liegen: dann wird die Regelfläche von einer Geraden erzeugt, die stets zwei festen Kurven begegnet und zu den Erzeugenden eines Kegels parallel bleibt.

b) Zwei der Leitlinien fallen zusammen: die Regelfläche ist der Ort der Sehnen einer Raumkurve, die eine andere (ebene oder schiefe) Kurve treffen.

c) Die drei Leitlinien fallen zusammen: die Regelfläche besteht aus den Geraden, die alle die gegebene (Raum-) Kurve dreimal schneiden.

d) Zwei der Leitlinien sind unendlich nahe: die Regelfläche besteht dann aus den Geraden, die zwei Leitlinien Γ und Δ treffen und in den Berührungsebenen der ersteren liegen. Um dieselbe zu

1) Wendet man auf die obigen Betrachtungen das Dualitätsgesetz an, so sieht man: **Eine Regelfläche besteht aus den Geraden, von denen jede in den drei Oskulationsebenen dreier Raumkurven liegt.**

2) Wendet man auf diese Sätze nochmals das Gesetz der Dualität an, so erhält man zwei neue Erzeugungsmethoden aller Regelflächen, die der Leser ohne Mühe aussprechen kann.

konstruieren, kann man wie folgt verfahren: Sei C ein Punkt von Γ und c die entsprechende Tangente; aus c kann man eine Gruppe von Tangentenebenen an den Kegel ziehen der $\varDelta$ von C projiziert; ihre Berührungserzeugenden g gehören der Regelfläche an, die erzeugt wird, wenn C die Kurve Γ durchläuft.

274. Wenden wir auf die durch Gl. (1) in Nr. 266 dargestellte windschiefe Regelfläche die allgemeine Gleichung der Tangentialebene einer Fläche, deren parametrische Darstellung man kennt, an (Nr. 224), so finden wir

$$\begin{vmatrix} x-[\xi(t)+u\cdot\varphi(t)] & y-[\eta(t)+u\cdot\chi(t)] & z-[\zeta(t)+u\cdot\psi(t)] \\ \xi'(t)+u\cdot\varphi'(t) & \eta'(t)+u\cdot\chi'(t) & \zeta'(t)+u\cdot\psi'(t) \\ \varphi(t) & \chi(t) & \psi(t) \end{vmatrix}=0,$$

oder einfacher

$$\begin{vmatrix} x-\xi(t) & y-\eta(t) & z-\zeta(t) \\ \xi'(t)+u\cdot\varphi'(t) & \eta'(t)+u\cdot\chi'(t) & \zeta'(t)+u\cdot\psi'(t) \\ \varphi(t) & \chi(t) & \psi(t) \end{vmatrix}=0. \quad . \quad (1)$$

Da man nun für die Erzeugenden (t) der Fläche, die dem Werte t des ersten Parameters entsprechen, die Gleichungen

$$\frac{x-\xi(t)}{\varphi(t)}=\frac{y-\eta(t)}{\chi(t)}=\frac{z-\zeta(t)}{\psi(t)}$$

hat, und da aus diesen Gleichungen die Gleichung (1) folgt, wie man auch u wählt, so sieht man bestätigt[1]): **Die Tangentialebene in einem beliebigen Punkte einer Regelfläche geht durch die zugehörige Erzeugende.** Diese ist also eine der durch diesen Punkt gehenden Haupttangenten (Nr. 225) und daher **enthält eine windschiefe Regelfläche nur hyperbolische Punkte.** Man kann die obigen Gleichungen auch so deuten: **Durchläuft ein Punkt eine Erzeugende der Regelfläche, so dreht sich i. a. die zugehörige Tangentialebene um diese Erzeugende.**

Es kann aber der Fall eintreten, daß die Variabele u in der Gleichung der Berührungsebene nur scheinbar vorkommt; damit dies geschehe, müssen die folgenden Identitäten statt haben:

$$\begin{vmatrix} \eta'(t) & \zeta'(t) \\ \chi(t) & \psi(t) \end{vmatrix}=\varrho\cdot\begin{vmatrix} \chi'(t) & \psi'(t) \\ \chi(t) & \psi(t) \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \zeta'(t) & \xi'(t) \\ \psi(t) & \varphi(t) \end{vmatrix}=\varrho\cdot\begin{vmatrix} \psi'(t) & \varphi'(t) \\ \psi(t) & \varphi(t) \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} \xi'(t) & \eta'(t) \\ \varphi(t) & \chi(t) \end{vmatrix}=\varrho\cdot\begin{vmatrix} \varphi'(t) & \chi'(t) \\ \varphi(t) & \chi(t) \end{vmatrix},$$

---

1) Wir sagen bestätigt, da der folgenden Satz aus der Definition der Berührungsebene sogleich folgt.

wo ϱ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Multiplizieren wir diese Beziehungen mit $\varphi'(t)$, $\chi'(t)$ $\psi'(t)$, und addieren sie, so folgt daraus

$$\begin{vmatrix} \varphi(t) & \chi(t) & \psi(t) \\ \xi'(t) & \eta'(t) & \zeta'(t) \\ \varphi'(t) & \chi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = 0,$$

und daher (vgl. Nr. 267) ist die Erzeugende eine torsale, oder die betrachtete Fläche ist abwickelbar. Indem wir beide Fälle ausschließen, wollen wir die Gl. (1) in folgender Form schreiben:

$$\begin{vmatrix} x-\xi(t) & y-\eta(t) & z-\zeta(t) \\ \xi'(t) & \eta'(t) & \zeta'(t) \\ \varphi(t) & \chi(t) & \psi(t) \end{vmatrix} + u\cdot\begin{vmatrix} x-\xi(t) & y-\eta(t) & z-\zeta(t) \\ \varphi'(t) & \chi'(t) & \psi'(t) \\ \varphi(t) & \chi(t) & \psi(t) \end{vmatrix} = 0. \quad (1')$$

Nun erteilen wir dem u vier beliebige Werte u_1, u_2, u_3, u_4 und es seien P_1, P_2, P_3, P_4 die entsprechenden Lagen des Punktes (t, u), $\pi_1 \ldots \pi_4$ die zugehörigen Tangentialebenen. Man sieht nun leicht, daß sowohl das Doppelverhältnis dieser vier Punkte, als das der vier Ebenen dargestellt wird durch

$$\frac{u_1 - u_3}{u_2 - u_3} : \frac{u_1 - u_4}{u_2 - u_4}$$

und daher besteht der folgende

Satz von Chasles: Das Doppelverhältnis von vier beliebigen Punkten auf einer (nicht torsalen) Erzeugenden einer windschiefen Regelfläche ist gleich dem der vier entsprechenden Tangentialebenen.

Wir wollen sogleich einige Folgerungen aus diesem wichtigen Satze anführen.

a) Es sei eine Regelfläche $\mathfrak{R}$ als Ort der ∞^1 Geraden definiert, die drei Linien Γ_1, Γ_2, Γ_3 treffen, P sei ein Punkt von $\mathfrak{R}$, g die durch ihn laufende Erzeugende und P_1, P_2, P_3 die Punkte, in denen g die Leitlinien trifft. Sind nun t_1, t_2, t_3 die Tangenten an diese Linien in jenen Punkten, so werden die Ebenen

$$\pi_1 \equiv g t_1, \qquad \pi_2 \equiv g t_2, \qquad \pi_3 \equiv g t_3$$

die Tangentialebenen an $\mathfrak{R}$ in jenen Punkten sein. Ist dagegen π die Ebene, die $\mathfrak{R}$ in P berührt, so haben wir zufolge des Chaslesschen Satzes

$$(\pi \pi_1 \pi_2 \pi_3) = (P P_1 P_2 P_3).$$

Dies letztere Doppelverhältnis ist nun bekannt, in dem ersteren kennt man π_1, π_2, π_3, also kann man π durch ein aus der projektiven Geometrie bekanntes Verfahren erhalten. **Man ist also imstande, die Tangentialebenen an eine beliebige durch drei Leitlinien bestimmte Regelfläche zu legen.**

b) Es seien $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ Regelflächen, die eine Erzeugende g gemeinsam haben. Jede durch g gelegte Ebene π berührt $\mathfrak{R}_1$ in einem



Punkte P_1 und $\mathfrak{R}_2$ in einem Punkte P_2 von g. Rotiert nun π um g, so beschreiben P_1 und P_2 zwei Punktreihen, die projektiv zu dem durch π erzeugten Büschel sind, und also auch zueinander. L und M seien deren Doppelpunkte, λ und μ die entsprechenden Tangentialebenen; λ berührt in L, μ in M, sowohl $\mathfrak{R}_1$, als auch $\mathfrak{R}_2$, also berühren sich auch $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ in L und M. Demnach: **Haben zwei Regelflächen eine Erzeugende gemeinsam, so berühren sie sich in zwei** (reellen oder konjugiert imaginären) **Punkten derselben.**

c) Wir betrachten wiederum zwei Flächen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, die eine Erzeugende g gemeinsam haben, und wollen annehmen, daß sie in drei Punkte A, B, C auch gemeinsame Tangentialebenen α, β, γ haben; dagegen seien π_1 und π_2 die Tangentialebenen an $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ in einem anderen beliebigen Punkte von g. Wenden wir nun zweimal den Satz von Chasles an, so ist

$$(ABCP) = (\alpha\beta\gamma\pi_1), \qquad (ABCP) = (\alpha\beta\gamma\pi_2),$$

also

$$(\alpha\beta\gamma\pi_1) = (\alpha\beta\gamma\pi_2),$$

woraus folgt, daß π_1 und π_2 zusammenfällt. Demnach: **Haben zwei Regelflächen in drei Punkten einer Erzeugenden gemeinsame Tangentialebenen, so haben sie auch in allen übrigen von g dieselben Tangentialebenen.** Solche zwei Flächen heißen „längs jener Erzeugenden verbunden".

d) In Folge des Chaslesschen Satzes können die Normalen einer Regelfläche längs einer Erzeugenden g angesehen werden als erzeugt durch die Verbindung der einzelnen Punkte von g mit den entsprechenden einer projektiven Punktreihe, die als Sitz die unendlich ferne, allen zu g senkrechten Ebenen gemeinsame Gerade hat; man kann also sagen: **Die Normalen einer Regelfläche in den Punkten einer Erzeugenden bilden ein hyperbolisches Paraboloid.**

Zur Übung. Zu zeigen, daß die für die durch Gl. (2) Nr. 266 dargestellte Fläche dieses Paraboloid die Gleichung hat

$$(x-\xi)\varphi' + (y-\eta)\chi' + (z-\zeta)\psi' = \frac{\varphi\varphi' + \chi\chi' + \psi\psi'}{\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2}\{(x-\xi)\varphi + (y-\eta)\chi + (z-\zeta)\psi\}$$
$$-(\varphi\xi' + \chi\eta' + \psi\zeta') + (\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2)\frac{(x-\xi)\xi' + (y-\eta)\eta' + (z-\zeta)\zeta'}{(x-\xi)\varphi + (y-\eta)\chi + (z-\zeta)\psi}.$$

e) Es sei wieder g eine Erzeugende von $\mathfrak{R}$, und r eine andere beliebige Gerade; wir schneiden $\mathfrak{R}$ mit den Ebenen eines Büschels dessen Achse r ist; jedem Punkte G von g entspricht dann sowohl die zugehörige Tangentialebene γ an $\mathfrak{R}$ als auch die Ebene $Gr = \delta$. Die Gerade $\gamma\delta = k$ ist dann offenbar die Tangente an die Kurve, in der $\mathfrak{R}$ von δ geschnitten wird. Lassen wir nun G die Gerade g durchlaufen, so beschreiben die Ebenen γ und δ zwei projektive Büschel, und daher beschreibt k eine Regelschar. Im speziellen, wenn wir r ins Un-

endliche verlegen, so ergibt sich: **Schneidet man eine Regelfläche durch eine Folge von parallelen Ebenen, so bilden die Tangenten an die Schnittkurven in den Punkten einer und derselben Erzeugenden ein hyperbolisches Paraboloid.**

275. Wenden wir auf die durch Gl. (1) in Nr. 266 dargestellte Regelfläche die Formel (11) aus Nr. 225 an, so erhalten wir als Gleichung der parabolischen Kurve:

$$\begin{vmatrix} \varphi'(t) & \chi'(t) & \psi'(t) \\ \xi'(t) & \eta'(t) & \zeta'(t) \\ \varphi(t) & \chi(t) & \psi(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Hieraus schließen wir (vgl. Nr. 267): **Die parabolische Kurve einer windschiefen Regelfläche besteht aus ihren torsalen Erzeugenden** (während bei einer Kegel-, Zylinder- oder abwickelbaren Fläche alle Punkte parabolisch sind).

Wenn man durch einen beliebigen Punkt des Raumes die Parallelen zu sämtlichen Erzeugenden einer Regelfläche zieht, so erhält man, wie schon (in Nr. 266) gesagt, den Leitkegel der Fläche; variieren wir jenen Punkt, so wechselt auch der Kegel, aber er erleidet offenbar nur eine Parallelverschiebung zu sich selbst. Nehmen wir als Scheitel jenes Kegels den Koordinatenanfang, so erhalten wir seine Gleichung offenbar durch Elimination von t aus den drei Gleichungen

$$\frac{x}{\varphi(t)} = \frac{y}{\chi(t)} = \frac{z}{\psi(t)},$$

und demnach läßt sich der Kegel parametrisch darstellen durch

$$x = u \cdot \varphi(t) \quad y = u \cdot \chi(t) \quad z = u \cdot \psi(t).$$

Die allgemeine Gleichung der Tangentialebene an diesen Kegel ist demnach

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \varphi(t) & \chi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \chi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = 0. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Hieraus läßt sich eine bemerkenswerte Folgerung ziehen. Betrachten wir nämlich auf der Erzeugenden (t) der Regelfläche den unendlich fernen Punkt, für den ja $u = \infty$ ist, so hat die entsprechende Tangentialebene (eine asymptotische Ebene für die Fläche) die Gleichung, die man aus (1) erhält, wenn man in ihr u nach ∞ übergehen läßt; diese ist also

$$\begin{vmatrix} x - \xi(t) & y - \eta(t) & z - \zeta(t) \\ \varphi(t) & \chi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \chi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = 0. \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Vergleichen wir nun (2) und (3) miteinander, so sehen wir, daß sie

zwei zueinander parallele Ebenen darstellen; also schließen wir: **Die asymptotische Ebene einer Regelfläche für eine beliebige Erzeugende g ist parallel zur Berührungsebene des Leitkegels längs der zu g parallelen Kegelseite.**

276.[1]) Auf der durch den Parameter t bestimmten Erzeugenden g der Regelfläche $\mathfrak{R}$ betrachten wir zwei den Parametern u_1 und u_2 entsprechende Punkte P_1 und P_2; die Gleichung der Berührungsebenen erhalten wir aus (1), wenn wir darin $u = u_1$ oder u_2 setzen. Sollen nun π_1 und π_2 zueinander senkrecht stehen, so muß sein

$$\left\| \begin{matrix} \xi' + u_1\varphi' & \eta' + u_1\chi' & \zeta' + u_1\psi' \\ \varphi & \chi & \psi \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \xi + u_2\varphi' & \eta + u_2\chi' & \zeta + u_2\psi' \\ \varphi & \chi & \psi \end{matrix} \right\| = 0. \quad (4)$$

Da diese Beziehung vom ersten Grade in u_1, u_2 und symmetrisch in diesem ist, so stellt sie eine Involution dar. Also: **Die Punktepaare auf den Erzeugenden einer Regelfläche, in denen die Tangentialebenen aufeinander senkrecht stehen, bilden eine quadratische Involution.** Der Zentralpunkt der Involution heißt (nach einem Vorschlage von Chasles) der Mittelpunkt der Erzeugenden; den Wert u_0 des ihm zukommenden Parameters erhält man aus Gl. (4), wenn man darin

$$u_1 = u_0, \qquad u_2 = \infty$$

setzt; er ist demnach die Wurzel folgender Gleichung

$$\left| \begin{matrix} (\xi'\varphi' + \eta'\chi' + \zeta'\psi') + u_0(\varphi'^2 + \chi'^2 + \psi'^2), & \varphi\varphi' + \chi\chi' + \psi\psi' \\ (\xi'\varphi + \eta'\chi + \zeta'\psi) + u_0(\varphi\varphi' + \chi\chi' + \psi\psi'), & \varphi^2 + \chi^2 + \psi^2 \end{matrix} \right| = 0. \quad (5)$$

Bei Variation von t stellt (5) den Ort der Mittelpunkte auf der Regelfläche dar, und dieser heißt die Kehllinie oder Striktionslinie der Fläche; es ließe sich zeigen, **daß sie der Ort der Fußpunkte der kürzesten Entfernungen benachbarter Erzeugenden ist,** womit wir eine zweite Definition der Kehllinie haben würden.

Wenn wir als Anfangspunkt (vgl. Nr. 266) auf einer Erzeugenden den Mittelpunkt wählen, so wird die Gl. (5) durch $u_0 = 0$ befriedigt, und dies verlangt, daß die Identität bestehe

$$\left| \begin{matrix} \xi'\varphi' + \eta'\chi' + \zeta'\psi' & \varphi\varphi' + \chi\chi' + \psi\psi' \\ \xi'\varphi + \eta'\chi + \zeta'\psi & \varphi^2 + \chi^2 + \psi^2 \end{matrix} \right| = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Nehmen wir zudem an, daß (s. Nr. 266 Schluß) die Identität bestehe

$$\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2 = 1,$$

so ist

$$\varphi\varphi' + \chi\chi' + \psi\psi' = 0$$

und daher wird (6) zu

$$\xi'\varphi' + \eta'\chi' + \zeta'\psi' = 0.$$

---

1) Diese etwas knapp gehaltene Nr. kann wohl beim ersten Studium übergangen werden.

Nun entnimmt man aus Gl. (1), wenn ω und π die Berührungsebenen an die Fläche im Anfangspunkt der Erzeugenden (t) und im Punkte $P = (tu)$ sind, daß dann zufolge der gemachten Annahmen

$$\operatorname{tg}^2(\omega\pi) = u^2 \frac{\left\| \begin{matrix} \eta'\psi - \zeta'\chi & \zeta'\varphi - \xi'\psi & \xi'\chi - \eta'\varphi \\ \psi'\chi - \psi\chi' & \psi\varphi' - \psi'\varphi & \varphi\chi' - \varphi'\chi \end{matrix} \right\|^2}{\left| \begin{matrix} \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 & \xi'\varphi + \eta'\chi + \zeta'\psi \\ \xi\varphi' + \eta\chi' + \zeta\psi' & \varphi^2 + \chi^2 + \psi^2 \end{matrix} \right|}$$

oder, da u die Länge der Strecke OP mißt,

$$\operatorname{tg}(\omega\pi) = \lambda \cdot \overline{OP},$$

wo λ eine Größe bedeutet, die nur von t abhängig ist. Diese bemerkenswerte Beziehung wird gewöhnlich M. Chasles zugeschrieben, obwohl sie zuerst von W. R. Hamilton entdeckt worden ist.[1])

§ 2. Algebraische Regelflächen.

277. Wenn die Gleichung, die durch Elimination von t und u aus den drei Gleichungen (2) in Nr. 266 entsteht, algebraisch ist, so heißt auch die zugehörige Regelfläche algebraisch. Es sei nun n ihre Ordnung, ν ihre Klasse; es besteht dann, wie wir zeigen werden, eine höchst einfache Beziehung zwischen diesen Größen. Eine beliebige Gerade r des Raumes treffe die Fläche in den Punkten $G_1, G_2 \ldots G_n$; durch jeden geht eine Erzeugende der Fläche, diese seien $g_1, g_2 \ldots g_n$. Die Ebenen $rg_1, rg_2 \ldots rg_n$ sind dann, da sie je eine Erzeugende enthalten, Berührungsebenen der Fläche; also ist $\nu \geqq n$. Sind ebenso γ_1, $\gamma_2 \ldots \gamma_\nu$, die durch r an die Fläche gelegten Berührungsebenen, so enthält jede eine Erzeugende g_i der Fläche; jeder der Punkte $r\gamma_1$, $r\gamma_2 \ldots r\gamma_\nu$ wird ihr angehören, daher ist $\nu \leqq n$. Die beiden aufgestellten Beziehungen verlangen, daß $n = \nu$, folglich: **Bei jeder algebraischen Regelfläche ist die Ordnung gleich der Klasse.** Diese Zahl wollen wir den Grad der Regelfläche nennen.

Satz: Die Geraden, die zugleich drei Raumkurven $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 treffen, die nicht zu je zweien Punkte gemeinsam haben, bilden eine Regelfläche vom Grade $n = 2n_1n_2n_3$.

Beweis. Offenbar ist n eine Funktion φ der drei Ordnungen, und es kommt nur darauf an, die Form von $\varphi(n_1, n_2, n_3)$ festzustellen. Nun ist n die Zahl der Schnittpunkte einer beliebigen Geraden r mit der Fläche, und da durch jeden von ihnen eine Erzeugende geht, so ist n zugleich die Zahl der Geraden, die r, Γ_1, Γ_2, Γ_3 zugleich treffen. Nun ist aber die Regelfläche gebildet aus den Geraden, die r, Γ_2, Γ_3 treffen vom Grade $\varphi(1, n_2, n_3)$. Diese wird nun von Γ_1 in $n_1 \cdot \varphi(1, n_2, n_3)$

1) C. Segre, *Monge e le congruenze generali di rette* (Bibliotheca mathematica, III. Reihe, VIII. Bd. 1908, S. 321—24).

Punkten getroffen; durch jeden dieser geht eine der fraglichen Erzeugenden, folglich ist

$$n = n_1 \cdot \varphi(1, n_2, n_3)$$

oder

$$\varphi(n_1, n_2, n_3) = n_1 \cdot \varphi(1, n_2, n_3). \quad \ldots \ldots \quad (*)$$

Ebenso läßt sich zeigen, daß

$$\varphi(n_1, n_2, n_3) = n_2 \cdot \varphi(n_1, 1, n_3) = n_3 \cdot \varphi(n_1, n_2, 1).$$

Setzen wir in dem ersten Falle $n_1 = 1$, im zweiten $n_1 = n_2 = 1$, so wird

$$\varphi(1, n_2, n_3) = n_2 \cdot \varphi(1, 1, n_3) \quad \ldots \ldots \quad (**)$$

und

$$\varphi(1, 1, n_3) = n_3 \cdot \varphi(1, 1, 1) \quad \ldots \ldots \quad (***)$$

Multiplizieren wir die drei bezeichneten Relationen miteinander, so bekommen wir

$$\varphi(n_1, n_2, n_3) = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \varphi(1, 1, 1).$$

Nun ist aber bekanntlich

$$\varphi(1, 1, 1) = 2$$

und daher

$$\varphi(n_1, n_2, n_3) = 2 n_1 n_2 n_3, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Wenn zwei der gegebenen Kurven, z. B. Γ_2 und Γ_3 einen Punkt P gemeinsam haben, so genügen alle Geraden, die Γ_1 von P aus projizieren der Bedingung, demnach scheidet sich von der Regelfläche ein Kegel von der Ordnung n_1 ab. Hieraus schließt man leicht: **Alle Geraden, die drei Kurven von der Ordnung n_1, n_2, n_3, die zu je zweien k_1, k_2, k_3 Punkte gemeinsam haben, in getrennten Punkten treffen, bilden im allgemeinen eine Regelfläche vom Grade**

$$2 n_1 n_2 n_3 - (k_1 n_1 + k_2 n_2 + k_3 n_3).$$

§ 3. Aufgaben der darstellenden Geometrie über Regelflächen.

278. Eine Regelfläche wird graphisch dargestellt, indem man ihre einzelnen Erzeugenden darstellt; ist sie durch ihre drei Leitlinien $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ bestimmt, so erhält man jene Erzeugenden im allgemeinen, indem man Γ_2 und Γ_3 von Punkten der Γ_1 aus projiziert, also indem man die je zwei Kegeln gemeinsamen Erzeugenden aufsucht; diese Konstruktion ist i. a. nicht einfach, in besonderen Fällen aber läßt sie sich jedoch vereinfachen, wie wir Nr. 279ff. sehen werden.

Wendet man Orthogonalprojektion an, so hat die Fläche zwei scheinbare Umrisse, deren Projektion im Grundriß die Enveloppe der ersten Projektionen g' der Erzeugenden und im Aufriß die der zweiten g'' ist; der Ort der Schnittpunkte entsprechender g' und g'' ist die Kurve, in der die beiden Projektionen des Schnittes der Fläche mit der zweiten Halbierungsebene zusammenfallen; schließlich der Schnitt der Fläche mit der Grund- und Aufrißebene, ist der geometrische Ort der betreffenden Spurpunkte der Erzeugenden in diesen Ebenen.

Wendet man Zentralprojektion an, so hat man: 1. den Ort der Spurpunkte der Erzeugenden in der Bildebene, 2. den Ort der entsprechenden Fluchtpunkte; die Enveloppe der Verbindungslinien zusammengehöriger Punkte beider Kurven liefert den scheinbaren Umriß der Fläche, gesehen vom Projektionszentrum aus.

Im Folgenden soll nun die Methode der Orthogonalprojektion zur Lösung einiger Aufgaben über Regelflächen zur Anwendung kommen; aber es wird dem Leser nicht entgehen, daß auch die Zentralprojektion, in besonderen Fällen auch andere Methoden auf die dargelegten Auflösungen wohl anwendbar sind.

I. Den Schnitt einer Regelfläche mit einer Ebene zu bestimmen.

Auflösung. Ist die Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$ senkrecht zur Grund- (oder Auf-) rißebene, und betrachten wir eine Erzeugende $g \equiv (g', g'')$; so ist der Punkt $X' \equiv g' t_1$ die Projektion eines Punktes der gesuchten Kurve; die zugehörige Ordinate schneidet g'' in X'', dessen Ort die zweite Projektion jener Kurve ist. Wenn jedoch τ keine projizierende Ebene ist, so kann man sie durch Verlegung der Bezugselemente dahin bringen, indem man als Aufrißebene eine zu t_1 senkrechte Ebene wählt. — Ohne diesen Kunstgriff kann man auch so verfahren: Es sei h diejenige Gerade von τ, die sich im Grundriß als g' projiziert; h' fällt also mit g' zusammen, während h'' sich finden läßt; alsdann gehört der Punkt $X'' \equiv g'' h''$ dem Aufriß der gesuchten Kurve an; die zugehörige Ordinate trifft g' in X'.

Zur Übung. Man versuche, diesen Grundgedanken auf die Bestimmung des ebenen Schnittes eines Kegels oder Zylinders anzuwenden (vgl. Nr. 257).

Anmerkung. Die duale Aufgabe, d. i. **von einem Punkte P aus den Tangentialkegel an eine Regelfläche zu legen,** wird gelöst, indem man die ∞^1 Ebenen konstruiert, die durch P und die Erzeugenden der Fläche gehen.

II. Die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Regelfläche zu konstruieren.

Auflösung. Wir suchen (m. s. o.) die Kurve Γ auf, in der die Fläche von der die Gerade $r \equiv (r', r'')$ — z. B. auf die Grundebene — projizierenden Ebene geschnitten wird. Dann trifft r'' die Γ'' in den Aufrissen der gesuchten Punkte, die zugehörigen Ordinaten liefern in den Schnitten mit r' den Grundriß.

III. Die Schnittkurve zweier Regelflächen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$ zu bestimmen.

Auflösung. Die Schnittkurve ist der Ort der Punkte, in denen die Erzeugenden g der ersten Fläche $\mathfrak{R}$ die Erzeugenden h der zweiten Fläche $\mathfrak{R}_1$ treffen. Ist im speziellen $\mathfrak{R}$ eine Kegelfläche mit der Spitze V (oder ein Zylinder), so projiziere man von V aus eine Erzeugende h von $\mathfrak{R}_1$ und bezeichne mit $g_1, g_2 \ldots$ die in der Ebene Vh

liegenden Erzeugenden von $\mathfrak{R}$, die Punkte hg_1, $hg_2 \ldots$ gehören der gesuchten Kurve an.

Durch jeden Punkt der Schnittlinie von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$ geht eine Erzeugende g und eine h; die Ebene gh ist eine gemeinsame Berührungsebene für $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$; somit ist zugleich die Aufgabe gelöst, **die zwei Regelflächen umschriebene Abwickelbare zu finden.**

§ 4. Untersuchung und Darstellung einiger spezieller Regelflächen.

I. Axoiden und Pseudoaxoiden.

279. Eine Regelfläche, die eine in endlicher Entfernung befindliche geradlinige Leitlinie d hat, heißt Axoide; eine solche kann analytisch durch drei Gleichungen von folgendem Typus dargestellt werden

$$x = u \cdot \varphi(t), \qquad y = u \cdot \chi(t), \qquad z = \xi(t) + u \cdot \psi(t),$$

wenn man als z-Achse die Gerade d nimmt, oder durch eine Gleichung von folgendem Typus:

$$z = x \cdot e\left(\frac{y}{x}\right) + y \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Um eine solche Fläche in Orthogonalprojektion bequem darzustellen, nehmen wir zweckmäßig als Grundebene eine zu d senkrechte Ebene und geben außerdem die beiden Projektionen der als weitere Leitlinien dienenden Kurven Γ und Δ (s. Fig. 119). Alsdann projizieren sich alle Erzeugenden g der Fläche in die Geraden g' des Büschels mit dem Zentrum d'.

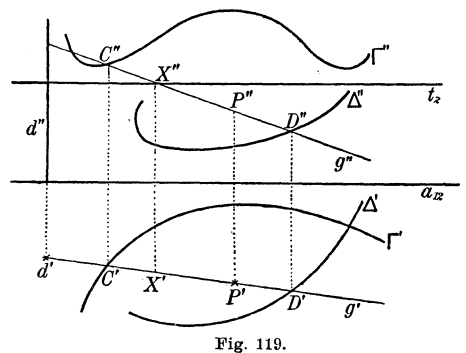


Fig. 119.

Ist ein Punkt P der Fläche nun durch seine erste Projektion, etwa P', gegeben, so findet man die zweite P'', auf folgende Weise: Man verbindet P' mit d'; die Verbindungslinie g' trifft Γ' in C', Δ' in D'. C'' und D'' seien die entsprechenden Punkte auf Γ'' und Δ''; wo nun die Gerade $C''D'' \equiv g''$ die Ordinate von P' trifft, liegt P''.

Alle Geraden g'' umhüllen nun den zweiten scheinbaren Umriß der Axoide, auch dieser kann u. a. dazu dienen, zu der zweiten Projektion eines Punktes der Fläche die erste zu finden. Zieht man nämlich von P'' an den Umriß die Tangenten g'', die Γ'' und Δ'' in C'' und Δ'' treffen, bestimmt daraus C' und D', so schneidet die Verbindungslinie $C'D' \equiv g'$ die Ordinate von P'' in P'.

Es ist leicht **den Grundriß der Schnittkurve Σ einer beliebigen horizontalen Ebene mit der Axoide zu konstruieren.** Ist nämlich t_2

die Spurlinie der Ebene, und schneidet eine beliebige Erzeugende diese in X, so ist $X'' \equiv t_2 g''$, während X' der Schnitt der entsprechenden Ordinate mit g' ist. Der Ort der Punkte X' ist die gesuchte Schnittkurve Σ.

Hieraus ergibt sich auch ein Verfahren, **die Tangentialebene in einem Punkte P der Axoide zu bestimmen.** Diese enthält nämlich zunächst die entsprechende Erzeugende; man suche demnach die Schnittkurve Σ der Fläche mit der durch P gehenden horizontalen Ebene (deren zweite Spurlinie t_2, die durch P'' zur Achse gezogene Parallele ist). Dann projiziert sich die in P an Σ gezogene Tangente t im Aufriß als t_2, im Grundriß als die von P' an Σ' gezogene Tangente t'; t und g bestimmen die gesuchte Tangentialebene.

Man beachte noch, daß die Betrachtung der Kurve Σ zu einem zweiten Verfahren führt, die erste Projektion eines Punktes P der Fläche, dessen zweite Projektion man kennt, zu bestimmen. Man suche nämlich die Kurve Σ' für die Ebene, die als zweite Spur die durch P'' zur Grundlinie gezogene Parallele hat; sie wird von der Ordinate von P'' in dem gesuchten Punkte P' geschnitten.

Zur Übung. I. Die Tangentenebenen einer Axoide durch Anwendung des Chaslesschen Satzes (Nr. 274) zu bestimmen. — **II.** Welche Modifikationen treten in diesen Konstruktionen auf, wenn die Leitlinie $\varDelta$ unendlich fern (auf einem gegebenen Kegel) sich befindet?

Eine den Axoiden analoge Fläche kann man erhalten, wenn man als gerade Direktrix eine unendlich ferne Gerade nimmt; sie heißt eine Pseudoaxoide, läßt man jene in der xy-Ebene gelegen sein, so ist die Fläche analytisch darstellbar durch drei Gleichungen von folgendem Typus:

$$x = \xi(t) + u \cdot \varphi(t), \qquad y = \eta(t) + u \cdot \chi(t), \qquad z = \zeta(t),$$

oder durch eine von folgender Form

$$\frac{x - \Xi(z)}{\Phi(z)} = \frac{y - H(z)}{X(z)}.$$

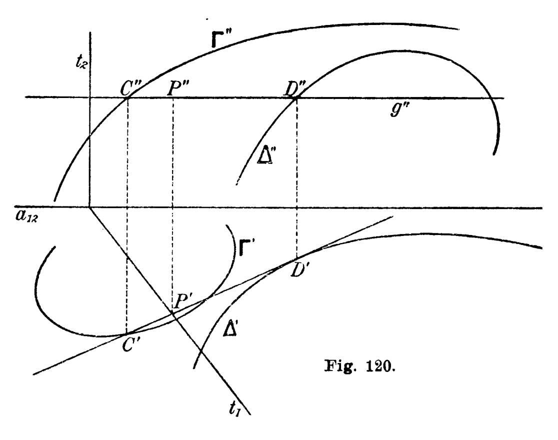


Fig. 120.

In Orthogonalprojektion kann sie sehr leicht dargestellt werden, wenn man eine der Projektionsebenen, z. B. die Grundrißebene durch die unendlich ferne Direktrix gehen läßt.

Die Erzeugenden sind alle zur ersten Projektionsebene parallel, daher ihre Aufrisse zur Achse a_{12} parallel. Sind (Fig. 120) wie früher $\Gamma \equiv (\Gamma', \Gamma'')$ und $\varDelta \equiv (\varDelta', \varDelta'')$ die krummen Leitlinien der Pseudoaxoide, so kann

eine beliebige zur Grundlinie a_{12} parallele Gerade g'' als die zweite Projektion einer Flächenerzeugenden angesehen werden. Seien C'' (auf Γ'') und D'' (auf Δ'') die Vertikalprojektionen der Treffpunkte der betrachteten Erzeugenden mit den Leitlinien; man suche C' und D'; ihre Verbindungslinie ist g'. Läßt man nun g'' parallel zu sich selbst bewegen, so erhält man alle die Flächenerzeugenden; die Enveloppe von g' ist der Grundriß der zweiten scheinbaren Umrisse der Fläche. Daraus folgt durch Betrachtungen, die analog denen sind, die wir bei den Axoiden angestellt haben, ein leichtes Verfahren um **die erste Projektion P' eines Flächenpunktes zu finden, deren zweite bekannt ist,** wie auch um **den Aufriß der Kurve punktweise zu beschreiben, in der die gegebene Fläche durch eine Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$ geschnitten wird, welche auf π_1 senkrecht steht.** Daraus ergibt sich dann eine Methode, **die Berührungsebene in einem beliebigen Flächenpunkte $P \equiv (P', P'')$ zu konstruieren:** diese Ebenen sind nämlich bestimmt durch die durch P gehenden Erzeugenden und durch die Gerade, welche in P die Kurve berührt, in der die Fläche von einer P enthaltenden Vertikalebene geschnitten wird.

Zur Übung. Die Tangentialebene einer Pseudoaxoide durch Anwendung des Chaslesschen Satzes (Nr. 274) zu bestimmen.

280. Zur Kategorie der Axoiden gehören einige, die in der Architektur vorkommen; die bekannteste ist die „Wölbfläche des schiefen Einganges" („biais passé" der Franzosen, „volta a sbieco" der Italiener). Sie wird folgendermaßen erzeugt: Gegeben sind zwei beliebig in zwei zueinander parallelen (vertikalen) Ebenen gelegene Kreise (in der Praxis Halbkreise) K_1, K_2, deren Durchmesser A_1B_1 und A_2B_2 in einer horizontalen Ebene liegen; auf dieser errichte man im Mittelpunkte C des Parallelogramms $A_1A_2B_2B_1$ die Senkrechte n: die fragliche Wölbfläche ist dann die Regelfläche mit den drei Leitlinien n, K_1, K_2. Um sie in Orthogonalprojektion darzustellen, nehmen wir die Ebene des Parallelogramms als Grundrißebene und die Parallele zu A_1B_1 durch C als Grundlinie (s. Fig. 121). Das Parallelogramm fällt dann mit dem Grundriß zusammen; im Aufriß fallen die Ecken auf die Grundlinie a_{12}. Grundrisse der beiden Kreise sind dann die Strecken A_1B_1 und A_2B_2, die Aufrisse sind Kreise über den Durchmessern $A_1''B_1''$ und $A_2''B_2''$. Die Gerade n bildet sich ab in n' senkrecht zu a_{12} in C, während n'' mit C zusammenfällt. Eine beliebige Erzeugende

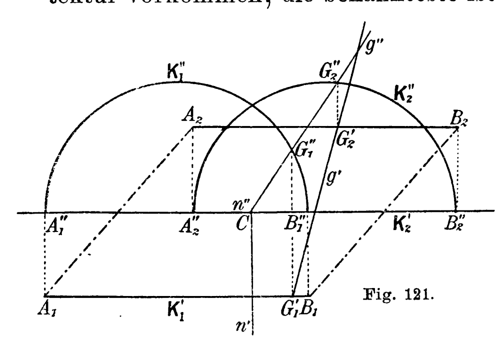


Fig. 121.

g der Fläche geht im Aufrisse durch C; sie möge K_1'' in G_1'' treffen und K_2'' in G_2'', man findet nun leicht G_1' und G_2', deren Verbindungslinie g' sein wird.

Der Grad dieser Regelfläche, die anscheinend nach dem Satz in Nr. 277 vom achten Grade ist, erniedrigt sich infolge der gegenwärtigen Lage der Leitlinien, wie wir nun zeigen wollen, indem wir ihre Gleichung aufstellen.[1] C nehmen wir als Anfangspunkt, n als y-Achse, und die Gerade a_{12} als x-Achse; dann sind die Gleichungen der beiden Kreise

$$y = -b, \qquad (x-a)^2 + z^2 = r^2,$$
$$y = +b, \qquad (x+a)^2 + z^2 = r^2.$$

Nimmt man nun auf der y-Achse einen beliebigen Punkt, etwa den, für welchen $y = \eta$, und projiziert von ihm aus die beiden Kreise, so erhält man die beiden Kegel

$$r^2(\eta - y)^2 = z^2(b+\eta)^2 + [x(b+\eta) + a(y-\eta)]^2,$$
$$r^2(\eta - y)^2 = z^2(-b+\eta)^2 + [x(-b+\eta) - a(y-\eta)]^2.$$

Die diesen beiden gemeinsamen Erzeugenden gehören der Wölbfläche an; nun fallen für $\eta = 0$ beide Gleichungen in die eine

$$r^2y^2 = b^2z^2 + (bx+ay)^2$$

zusammen, weshalb dieser Kegel auch zu der Fläche gehört. Der übrige Teil hat eine Gleichung, die man durch Elimination von η aus den vorigen erhält. Subtrahiert man diese voneinander, so bekommt man

$$\eta = \frac{bz^2 + x(bx+ay)}{ax},$$

und setzt man diesen Wert in die vorige Gleichung ein, so scheidet sich der Faktor $x^2 + z^2$ ab, und es bleibt

$$[axy + b(x^2+z^2)]^2 = b^2r^2x^2 + b^2(r^2-a^2)z^2.$$

Dies ist die gewünschte Gleichung; da sie vierter Ordnung ist, so ist damit der Grad der Wölbfläche als vier nachgewiesen. Da die Gleichung sich nicht ändert, wenn man die Vorzeichen der Koordinaten wechselt, so ist der Anfang ein Mittelpunkt der Fläche. Eine beliebige durch die y-Achse gelegte Ebene schneidet die Fläche längs zweier paralleler in bezug auf den Mittelpunkt symmetrischer Geraden, usw.[2]

Zur Übung. Ähnlich obiger Wölbfläche sind die als „arrière voussure de Marseille“ und „arrière voussure de Montpellier“ bezeichneten Flächen. Die erste hat als Leitlinien zwei in zueinander parallelen Ebenen gelegene Kreise von verschiedenem Radius und die vom Zentrum des einen auf die Ebenen selbst gefällte Senkrechte. Die andere hingegen hat als Leitlinien einen Kreis, die im Mittelpunkte zu seiner Ebene errichtete Senkrechte und eine zu dieser Ebene parallele Gerade. Diese Flächen sind darzustellen und zu untersuchen.

1) Dasselbe kann man durch Anwendung des Schlusses von Nr. 277 erreichen.

2) Eine eingehende Untersuchung dieser Fläche findet sich im II. Bd. des *Traité de géom. déscriptive* von J. de la Gournerie (2. Aufl., Paris 1880 S. 208ff.).

II. Konoide.

281. Eine Regelfläche die (man sowohl als Axoide wie Pseudoaxoide ansehen kann, d. h.) zwei Geraden als Leitlinien hat, von denen eine im Unendlichen liegt, heißt ein Konoid. Eine solche Fläche ist daher der geometrische Ort der Geraden, die stets eine feste Gerade (die Leitgerade) treffen, parallel zu einer festen Ebene (der Leitebene) laufen und noch einer anderen Bedingung unterworfen sind. Je nachdem die Leitgerade zur Leitebene senkrecht steht oder nicht, heißt das Konoid ein gerades oder schiefes.

Wir nehmen als Leitgerade die z-Achse eines kartesischen Systems (das nicht rechtwinklig zu sein braucht) und als Leitebene die xy-Ebene, dann kann das Konoid in folgender Weise parametrisch dargestellt werden

$$x = u \cdot \varphi(t),\ y = u \cdot \chi(t),\ z = \psi(t),$$

woraus hervorgeht, daß

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

die allgemeine Gleichung des Konoids ist.

Meusnier[1]) hat folgende Anwendung der Konoide auf die Aufgabe erdacht: «Die Tangentialebenen, die durch eine Gerade g an eine beliebige Fläche $\mathfrak{F}$ gelegt werden können, zu bestimmen». Man konstruiere das Konoid, das gebildet wird von den Geraden die $\mathfrak{F}$ berühren, g treffen und parallel einer beliebigen Ebene δ sind; es genügt hierfür g und $\mathfrak{F}$ mit einer zu δ parallelen Ebene zu schneiden und von dem erhaltenen Punkte an die entstandene Kurve die Tangenten zu ziehen. Ist nun Γ die Berührungskurve zwischen $\mathfrak{F}$ und dem Konoid, so bestimmt jede Tangente von Γ, die g trifft, mit dieser Geraden eine der gesuchten Ebenen.

Zur Übung. Die Isophoten eines Konoids zu untersuchen.

282. Der Cono-cuneus (Kegel-Keil) **von Wallis.** Das einfachste Konoid ist das hyperbolische Paraboloid. Ihm am nächsten in bezug auf Einfachheit steht das gerade Konoid, das als zweite Direktrix einen Kreis Δ hat, dessen Ebene parallel der geraden Direktrix ist. Es hat den Namen Kreiskonoid oder Cono-cuneus von Wallis oder Kegel-Keil, und (wegen gewisser Anwendungen in der Architektur) durch die Franzosen voûte d'arêtes en tour ronde erhalten. Diese Fläche wird also gebildet von allen Geraden, die auf einer gegebenen Geraden d senkrecht stehen und durch einen Kreis gehen, dessen Ebene zu d parallel geht.

Um eine bequeme graphische Darstellung zu erhalten, nehmen wir die Leitebene als Grundriß- und eine zur Ebene des Kreises parallele

1) Vgl. Th. Olivier, *Cours de géométrie déscriptive,* II éd. (Paris 1854) p. 291.

als Aufrißebene (s. Fig. 122). Dann bildet sich dieser in wahrer Größe ab im Aufriß, im Grundriß als eine zu der Achse parallele Strecke $A'B'$, gleich dem Durchmesser; die gerade Direktrix d wird im Grundriß zu einem Punkte $D' \equiv d'$, im Aufriß zu einer zur Achse senkrechten Geraden d''.

Die Erzeugenden g werden im Grundriß zu Geraden, die durch D' gehen, im Aufriß zu Parallelen zur Achse a_{12}. Genauer: Jede durch D' gehende und die Strecke $A'B'$ in einem reellen Punkte G' treffende Gerade ist die Projektion zweier Erzeugenden der Fläche. Nennen wir nämlich G'' und G_1'' die (reellen) Punkte in denen die Ordinate von G' den Kreis Δ'' trifft, so sind die durch G'' und G_1'' zur Achse gezogenen Parallelen die zweiten Projektionen g'' und g_1'' der beiden Erzeugenden, deren erste Projektion g' war. Umgekehrt wenn eine Gerade h'', parallel zur Achse, Δ'' in den beiden Punkten H'' und H_1'' trifft, und es treffen die zugehörigen Ordinaten $A'B'$ in H' und H_1', so sind die Geraden $D'H'$ und $D'H_1'$, die ersten Projektionen h' und h_1' jener beiden Erzeugenden, deren zweite Projektionen in h'' zusammenfallen. Hieraus geht hervor, daß die ersten Projektionen der reellen Erzeugenden alle innerhalb des Winkels $A'D'B'$ liegen müssen, und daß dieser daher den ersten scheinbaren Umriß der Fläche bildet, die zweiten Projektionen aber alle innerhalb des von den zu a_{12} parallelen Tangenten von Δ'' gebildeten Streifens liegen, weshalb dieser den zweiten scheinbaren Umriß bildet.

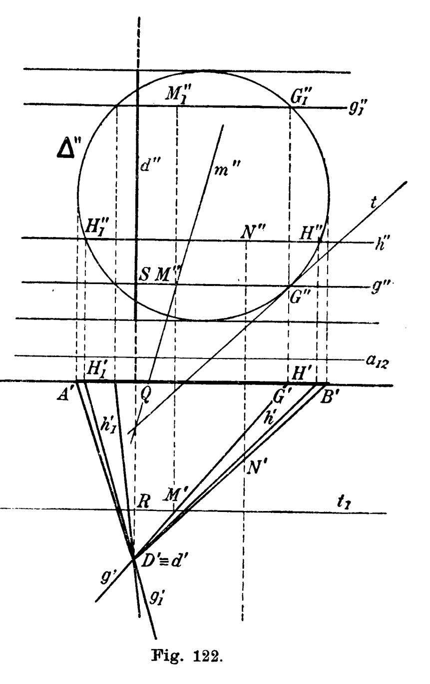


Fig. 122.

Die obigen Betrachtungen setzen uns in den Stand, Punkte der Fläche, die durch eine Projektion gegeben sind, darzustellen. Ist nämlich M' ein innerhalb des Winkels $A'D'B'$ gelegener Punkt, so ziehe man $D'M' \equiv g'$ und bestimme hierzu die zweiten Projektionen g'', g_1''; diese werden von der Ordinate von M' in den Punkten M'', M_1'' geschnitten, die beide zu M' gehören. Ist hingegen N'' innerhalb des vorhin gekennzeichneten Streifens gegeben, so ziehe man durch ihn die Parallele h'' zur Achse und suche die ersten Projektionen h' und h_1' der Erzeugenden h und h_1 deren Aufriß h'' war; sie schneiden die Ordinate von N'' in N' und N_1', dem Grundriß der gesuchten Punkte.

Zur Übung. Den Seitenriß des Kegelkeils herzustellen.

283. Eine nützliche Anwendung des Vorigen ist **die Bestimmung der Schnittlinie Σ des Kegelkeils mit einer zum Leitkreise parallelen Ebene.** Es sei t_1 die erste (natürlich zur Achse parallele Spur der Schnittebene), dann wird irgend ein Punkt M' von t_1 einen Punkt von Σ im Grundriß darstellen, wir können also M'' finden. Sind nun Q, R, S die Schnitte von d'' mit $A'B'$, t_1, g'', so folgt (s. wieder Fig. 122) aus den ähnlichen Dreiecken $D'M'R$, $D'G'Q$, daß

$$\frac{M'R}{G'Q} = \frac{D'R}{D'Q}, \quad \text{oder} \quad \frac{M''S}{G''S} = \frac{D'R}{D'Q}.$$

Nun hat das letzte Glied einen von M' unabhängigen Wert, weshalb für alle Punkte von Σ $\frac{M''S}{G''S}$ konstant ist. Dies zeigt, daß Σ'' diejenige Kurve ist, die dem Kreise $\varDelta''$ entspricht in der Affinität, die d'' als Achse und $\frac{D'R}{D'Q}$ als Affinitätsverhältnis hat. Σ'' ist also eine Ellipse, und dasselbe gilt von Σ, da diese Kurve identisch mit ihrer Vertikalprojektion ist. Folglich: **Die zum Leitkreise eines Kegelkeils parallelen ebenen Schnitte sind Ellipsen.** Ebenen, die gleichen Abstand von der Leitgeraden haben, liefern kongruente Ellipsen, insbesondere gibt es außer $\varDelta$ noch einen kreisförmigen Schnitt; er wird von der zu d symmetrisch zur Ebene von $\varDelta$ liegenden Ebene geliefert.

Aus dem Vorigen ergibt sich eine **Konstruktion der Tangentialebene in einem beliebigen Punkte M des Kegelkeils.** Diese geht nämlich in erster Linie durch die den Punkt M enthaltende Erzeugende $g \equiv (g', g'')$; ferner geht sie durch die Tangente m in M an die zum Leitkreise $\varDelta$ parallele Schnittlinie Σ. m' fällt nun mit der durch M' zur Achse gezogenen Parallelen zusammen, m'' ist die Gerade, die in der früher angeführten Affinität der Geraden t entspricht, die $\varDelta''$ in G'' berührt. Nun schneiden sich aber zwei affine Geraden auf der Achse, folglich ist m'' nichts anderes als die Verbindungslinie der Punkte M'' und td''. Somit ist die gesuchte Ebene durch die beiden Geraden $g \equiv (g', g'')$ und $m \equiv (m', m'')$ völlig bestimmt, und man kann ihre Spuren m_1 und m_2 finden.

284. Schließlich soll noch eine einfache **Konstruktion der Schnittpunkte eines Kreiskonoids mit einer Geraden g** gezeigt werden. Wir beachten in diesem Falle, daß die Fläche der geometrische Ort der Geraden ist, die den Kreis $\varDelta$, die Gerade d und die unendlich ferne Gerade u der Leitebene treffen; die Untersuchung ist also zurückgeführt auf die der Geraden, die die vier Linien $d, u, g, \varDelta$ treffen. Wir betrachten zunächst die Fläche, die von den Geraden gebildet wird, die d, u, g treffen, und schneiden diese mit dem Kreise $\varDelta$; durch jeden der Treffpunkte geht eine solche Gerade. Jene Fläche ist nun ein hyperbolisches Paraboloid, und dieses schneidet die Ebene von $\varDelta$ in

einem Kegelschnitte Γ; $\varDelta$ und Γ schneiden sich in vier Punkten X_i ($i = 1, 2, 3, 4$); von jedem dieser Punkte geht eine Gerade g_i aus, die d, g, u trifft, und die Punkte $g g_i$ sind die gesuchten.

Um die Konstruktion auszuführen, stellen wir den Kegelkeil in der früheren Weise dar und die Gerade g durch ihre Projektionen g', g''. Eine beliebige Erzeugende p des Paraboloids projiziert sich im Aufriß in eine zur Achse a_{12} parallele Gerade p'' (s. Fig. 123). Die Punkte D und R, in denen sie die Geraden d und g trifft, haben als Aufriß die Punkte $d''p''$ und $g''p''$, als Grundriß $D' \equiv d'$ und den Schnitt von g' mit der Ordinate von R''; es ist also $p' \equiv D'R'$. Nun hat der Punkt P, in welchem p die Ebene von $\varDelta$ trifft, als Grundriß den Punkt P', in welchem p' die Gerade AB trifft, als Aufriß den Schnitt der Ordinate von P' mit p''. Verschieben wir nun p'' parallel zu a_{12}, so beschreibt P'' den Kegelschnitt Γ'', dessen vier Schnitte mit $\varDelta''$ die Punkte X_i'' sind. Ziehen wir durch sie die Parallelen zu a_{12}, so schneiden diese g'' in den Punkten P_i'', woraus dann leicht die P_i' folgen.

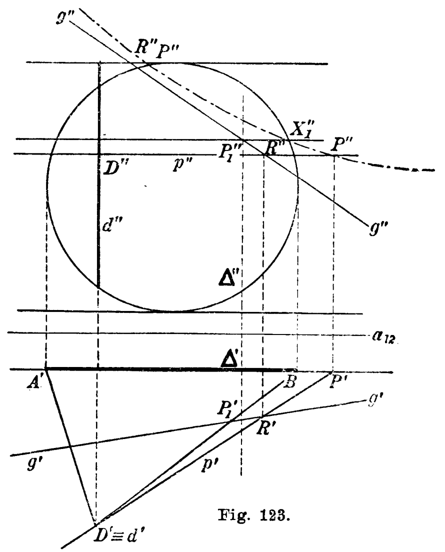


Fig. 123.

Die vier Geraden g_i bestimmen zugleich mit der gegebenen g die von dieser an das Konoid gelegten Tangentialebenen, womit zugleich die Aufgabe gelöst ist: **Durch eine Gerade die Berührungsebenen an einen Kegelkeil zu legen.** Die angeführten Konstruktionen zeigen uns, daß der Kegelkeil eine Fläche vierter Ordnung und vierter Klasse ist.

Anmerkung. Die Definition des Kegelkeils läßt sich verallgemeinern, wenn man an Stelle des Leitkreises einen beliebigen Kegelschnitt setzt, man erhält dann ein sog. Kegelschnittkonoid. Nehmen wir insbesondere an, daß der Konoid gerade sei, und daß wir eine Ellipse nehmen, deren eine Achse parallel zu der geraden Leitlinie ist, so können wir letztere etwa als z-Achse nehmen und als xy-Ebene die Leitebene der Fläche. Dann bekommen die Gleichungen der Leitellipse E folgende Gestalt

$$x = a, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Eine beliebige Erzeugende der Fläche wird dargestellt durch

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b \cdot \cos\varphi}, \qquad z = c \cdot \sin\varphi.$$

Durch Elimination von φ ergibt sich

$$\frac{a^2c^2}{b^2}y^2 + x^2z^2 = c^2x^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

als Gleichung der Fläche, die also vierten Grades ist. Wenn im speziellen $c = b$, so haben wir den Kreiskegelkeil von Wallis mit

$$a^2y^2 + x^2z^2 = b^2x^2. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

Schreiben wir die Gl. (α) in der Form

$$\frac{y^2}{\left(\frac{b\,x}{a}\right)^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha')$$

so sieht man, daß die zur Leitellipse parallelen Schnitte der Fläche wieder Ellipsen sind; insbesondere bekommen wir für $x = \pm \frac{ac}{b}$ zwei kreisförmige Schnittkurven. Nun kann jeder dieser Schnitte als Leitlinie statt der Ellipse E genommen werden; die Verallgemeinerung ist also nur eine scheinbare: dies Ergebnis stimmt auch damit überein, daß Gl. (α) durchaus nicht allgemeiner ist als (β), da beide nur zwei wesentliche Konstanten enthalten.

285. Kugelkonoide. Bewegt sich eine Gerade so, daß sie stets eine feste Gerade d trifft, dabei immer parallel einer gegebenen Ebene bleibt, und eine feste Kugel berührt, so erzeugt sie eine Fläche, die als einer Kugel umbeschriebenes Konoid oder kurz als Kugelkonoid bezeichnet wird. In Orthogonalprojektion läßt sie sich bequem darstellen, indem man die Leitebene parallel zur Grundrißebene nimmt. Ist $O \equiv (O', O'')$ der Mittelpunkt der Kugel (s. Fig. 124), so stellt der Kreis Γ'' mit dem Zentrum O'' und dem Radius r, gleich dem Kugelradius, den zweiten scheinbaren Umriß der Kugel dar. Eine beliebige Horizontalebene τ (etwa die mit der zu a_{12} parallelen Spurlinie t_2) schneidet die Kugel in einem Kreise K, dessen Durchmesser gleich der Sehne MN ist, die t_2 auf Γ'' ausschneidet; im Grundriß ist K' der Kreis um O' mit diesem Durchmesser. Es sei nun P der Punkt, in welchem d die τ trifft, dann sind die von P' an K' gezogenen Tangenten a', b', der Grundriß zweier Erzeugenden, die in τ liegen, weshalb a'' und b'' mit t_2 zusammenfallen. Sind A', B' die Berührungspunkte an K', so schneiden die zugehörigen Ordinaten t_2 in A'', B''. Die Punkte $A \equiv (A', A'')$ und $B \equiv (B', B'')$ gehören der Kurve Σ an, längs deren die Kugel von dem Konoide berührt wird; verschieben wir t_2 parallel zu sich selbst, so erhalten wir punktweise Σ'' und Σ'. Natürlich geht Σ auch durch die Schnittpunkte von d mit der Kugel, falls diese Punkte reell sind.

Um die Ordnung der Konoids und der Kurve Σ zu finden, nehmen wir ein kartesisches System, dessen xy-Ebene parallel zur Leitebene

ist, und nehmen an, daß die Gleichungen der Leitgeraden und der Kugel sein mögen

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma},$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Ist ferner $z = k$ die Gleichung einer zur xy-Ebene parallelen Ebene τ, so schneidet diese die Gerade d in einem Punkte mit den Koordinaten

$$\xi = a + \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}(k-c),$$

$$\eta = b + \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}(k-c),$$

$$\zeta = k,$$

und die Kugel in einem Kreise, dessen Projektion sein wird

$$x^2 + y^2 = r^2 - k^2.$$

Die beiden Tangenten a', b' werden dann zusammen wiedergegeben durch

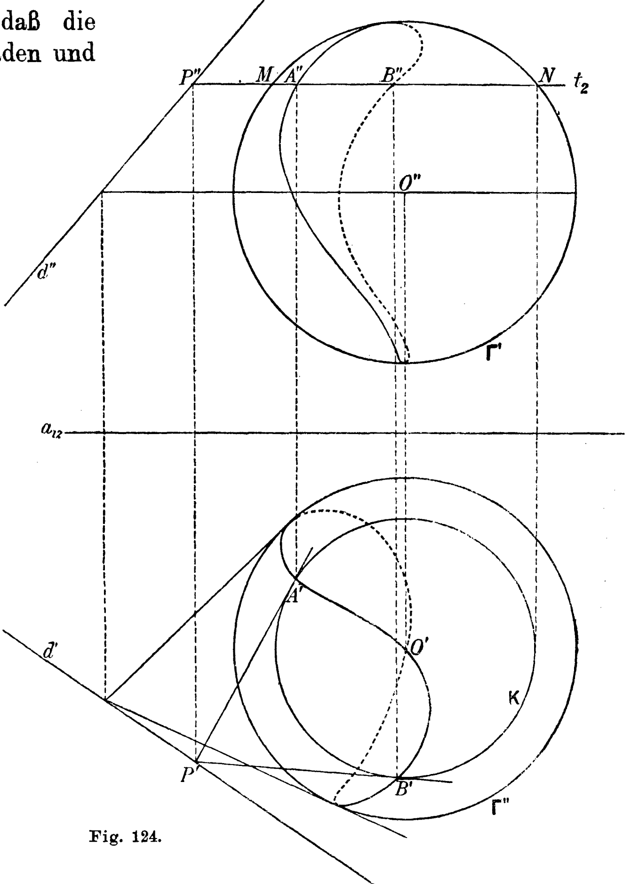


Fig. 124.

$$(x^2 + y^2 + k^2 - r^2)(\xi^2 + \eta^2 + k^2 - r^2) - (x\xi + y\eta + k^2 - r^2)^2 = 0.$$

Eliminieren wir nun ξ, η, k, so erhalten wir als Gleichung der Fläche

$$(x^2 + y^2 + z^2 - r^2)\left\{\left[a + \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}(z-c)\right]^2 + \left[b + \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}(z-c)\right]^2 + z^2 - r^2\right\} -$$

$$-\left\{ax + by + (z-c)\frac{x\cos\alpha + y\cos\beta}{\cos\gamma} + z^2 - r^2\right\}^2 = 0.$$

Das Kugelkonoid ist demnach vom vierten Grade. Aus der so gefundenen Gleichung ergibt sich auch, daß die Kurve, in der es die Kugel berührt, zugleich der Fläche zweiten Grades angehört

$$ax + by + (z-c)\frac{x\cos\alpha + y\cos\beta}{\cos\gamma} + z^2 - r^2 = 0,$$

und dies beweist uns, **daß die Berührungskurve Σ eine Raumkurve vierter Ordnung, erster Spezies ist**, d. h. daß durch sie ∞^1 Flächen

zweiten Grades hindurchgehen, welches Resultat mit einem allgemeinen Satze von Chasles in Übereinstimmung ist.[1])

§ 5. Verschiedenes über einige andere Regelflächen.

286. Zur Übung. I. Bewegt sich eine Gerade so, daß sie stets an dem Umfange eines Kreises Δ entlanggleitend eine, in einem Punkte desselben zur Ebene von Δ errichtete Senkrechte s trifft und dabei parallel bleibt zu einer Ebene, die mit der von Δ und der durch s gelegten Berührungsebene an Δ gleiche Winkel bildet, so entsteht eine Regelfläche, die als Küppersches Konoid bezeichnet wird. In kartesischen Koordinaten läßt sie sich darstellen durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2)(y + z) = 2ry^2,$$

wenn r der Radius von Δ; es handelt sich also um eine Regelfläche dritten Grades. Diese Fläche soll in Orthogonalprojektion dargestellt und dadurch untersucht werden. (Zweckmäßig nehme man als Grundrißebene die von Δ, als Aufrißebene die durch s an Δ gelegte Berührungsebene.)

II. Gegeben ein Kreis Γ, vom Mittelpunkt O und Halbmesser r, und eine Gerade l, welche in einem Punkte R von Γ zu seiner Ebene normal ist; eine Strecke AB von der Länge $2r$ durchläuft mit ihren Endpunkten l und Γ; die Gerade auf der sie liegt, beschreibt eine Regelfläche, die zu erforschen und darzustellen ist. (Man ziehe den Durchmesser ROS und beachte, daß $AS = BR$ ist.)

III. Gegeben zwei zueinander senkrechte windschiefe Gerade r, s und eine Strecke l. Bewegt sich nun eine Gerade so, daß sie stets r und s in zwei Punkten A, B trifft, deren Abstand l ist, so entsteht eine Regelfläche vierten Grades, die untersucht und dargestellt werden soll. (Man nehme die Bezugsebene so, daß r in der einen senkrecht zur Achse a_{12} liegt, s in der anderen parallel zu a_{12}, und beachte, daß nicht nur die Strecke AB, sondern auch seine Projektionen von konstanter Größe bleiben.)

IV. Gegeben ein Zylinder mit zur Achse a_{12} parallelen Erzeugenden; man schneide ihn mit zwei vertikalen Ebenen σ_1, σ_2; Γ_1, Γ_2 seien die Schnittkurven, G, G_1 zwei entsprechende, auf derselben Erzeugenden liegende Punkte. Nun möge Γ_1 eine Translation in einer zur Grundebene senkrechten Richtung ausführen, und H soll die neue Lage von G_1 sein: der Ort der Geraden GH ist dann eine Fläche die als Freziers Zylindroid bezeichnet wird. Diese soll untersucht und dargestellt werden für den Fall, daß der gegebene ein gerader Kreiszylinder sei.

---

1) Der betreffende Satz lautet: Bewegt sich eine Gerade im Raume so, daß sie stets zwei Geraden a, b trifft und zugleich eine Fläche zweiten Grades Φ berührt, so ist der Ort Σ der Berührungspunkte eine Raumkurve 4ter Ordnung, durch die ∞^1 Flächen 2ter Ordnung hindurchgehen. Zum Beweise genügt es zu zeigen, daß durch Σ noch eine andere Fläche 2ter Ordnung hindurchgeht. Wir nehmen auf a beliebig den Punkt A und betrachten seine Polarebene α in Bezug auf Φ; es sei ferner $\pi \equiv Ab$. Die Gerade $r \equiv \alpha\beta$ schneidet Φ in zwei Punkten X, Y, die die Berührungspunkte des Kegelschnittes sind, der auf Φ durch die Ebene π bestimmt wird, mit den von A gezogenen Tangenten, also gehören X, Y der Kurve Σ an. Verschieben wir nun A auf a, so beschreiben α und π zwei einander projektive Büschel, da sie beide perspektiv zu der von a beschriebenen Punktreihe sind; in Folge dessen beschreibt die Schnittgerade $r \equiv \pi\alpha$ eine Regelschar, deren Schnitt mit Φ die Kurve Σ ist. Somit ist der Satz bewiesen, und man sieht, daß man noch eine dritte Fläche 2ter Ordnung erhalten kann durch Anwendung des vorigen Verfahrens, indem man die Geraden a und b miteinander vertauscht.

V. Man kann leicht zeigen: Eine Strecke kürzesten Abstandes zwischen zwei Kurven Γ_1, Γ_2 liegt auf einer zu beiden senkrechten Geraden. Um diese zu finden, verschiebe man Γ_2 parallel zu sich selbst, bis ein auf ihr beliebig gewählter Punkt O der Reihe nach mit allen Punkten von Γ_1 zusammenfällt. Ist nun $\overline{\Gamma}_2$ die Lage die Γ_2 einnimmt, wenn O auf den Punkte P von Γ_1 fällt, so ziehe man diejenige Gerade g, die senkrecht steht zu den Tangenten in P an Γ_1 und Γ_2. Alle zu g analogen Geraden bilden eine Regelfläche, und durch jeden der Punkte, in welchen sie die Γ_2 trifft, geht eine Gerade, die einen der gesuchten kürzesten Abstände enthält. Auf diese Weise soll der kürzeste Abstand zwischen einem Kreise (der in der Grundrißebene liegt) und einer beliebigen Geraden des Raumes gefunden werden.

Fünftes Kapitel.

Die Rotationsflächen.

§ 1. Definitionen und allgemeine Eigenschaften.

287. Eine Rotationsfläche entsteht durch Rotation einer Kurve Γ (der Erzeugenden) um eine feste Gerade a, die Achse, mit der sie unverändert verbunden ist. Durch jeden Punkt der Fläche geht also eine mit Γ identische Kurve. Jeder Punkt von Γ beschreibt bei dieser Bewegung einen Kreis, dessen Zentrum auf a liegt, und dessen Ebene zu a senkrecht steht: ein solcher Kreis heißt Parallelkreis der Fläche. Es ist klar, daß dieselbe Fläche auch entstehen würde, wenn man statt Γ irgend eine andere, alle Parallelkreise schneidende Kurve nähme; insbesondere kann man als Erzeugende einen durch die Achse a gelegten ebenen Schnitt nehmen; eine solche Erzeugende heißt Meridiankurve der Fläche. Alle Meridiane sind einander kongruente und zu a symmetrische Kurven. Nehmen wir eine solche als Erzeugende, so liefern diejenigen Punkte, die von a den größten Abstand haben, einen sog. Äquatorkreis der Fläche, diejenigen die den kleinsten Abstand haben einen Kehlkreis (s. Fig. 125). Ist M ein Punkt, in welchem der Meridian die Achse a schneidet, m die zugehörige Tangente, so wird m (wenn es, was ja im allgemeinen der Fall ist, nicht senkrecht zu a steht) bei der Rotation einen Kreiskegel beschreiben, gebildet aus lauter Tangenten an die Rotationsfläche; folglich **liefert jeder Schnittpunkt des Meridians mit der Achse im allgemeinen einen Doppelpunkt der Fläche.** Ein Doppelpunkt des Meridians hingegen, der nicht auf der Achse liegt, erzeugt einen Doppelparallelkreis der Fläche.

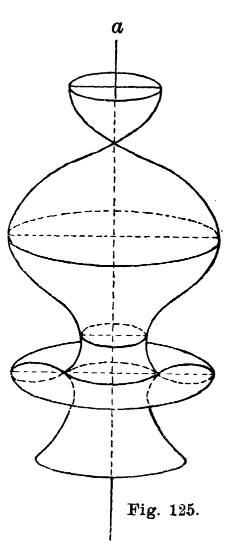


Fig. 125.

Durch jeden Punkt P der Fläche geht ein Meridian und ein Parallelkreis; die beiden Tangenten an die beiden Kurven bestimmen die Tangentialebene an die Fläche in P. **Die Tangenten an die Meridian-**

kurve in sämtlichen Punkten ein und desselben Parallelkreises bilden offenbar einen Rotationskegel, der mit der Fläche koaxial ist, seine Spitze also auf a hat. Ein zweiter Kegel von derselben Beschaffenheit entsteht durch die Normalen der Fläche in demselben Parallelkreis. Die Spitze dieses Kegels ist der Mittelpunkt einer Kugel, die die Fläche längs jenes Kreises berührt.

Jede Ebene senkrecht zur Achse schneidet die Fläche in einem oder mehreren Parallelkreisen; jede Ebene durch die Achse teilt die Fläche in zwei kongruente, zur Ebene selbst symmetrische Teile. Eine beliebige Ebene σ aber, die weder durch a geht, noch senkrecht dazu ist, schneidet die Fläche in einer gewissen Kurve Δ. Ist α nun die durch a zu σ senkrecht gelegte Ebene, und $a_0 \equiv \alpha\sigma$, und greifen wir auf Δ irgend einen Punkt D heraus, so liegt der zu D in Bezug auf α symmetrische Punkt $\overline{D}$ auch auf der Fläche; da aber α senkrecht zu σ, so liegt $\overline{D}$ auch in σ, gehört also auch der Kurve Δ an und liegt symmetrisch zu D in bezug auf a_0. Daraus folgt: **Jeder ebene Schnitt einer Rotationsfläche liefert eine Kurve, die symmetrisch ist zur Orthogonalprojektion der Achse auf die Schnittebene.**

Es seien μ_1 und μ_2 zwei Meridianebenen mit den Meridianen M_1 und M_2, α und β die Halbierungsebenen der von ihnen gebildeten Winkel. Ist nun P_1 ein Punkt von M_1, so gehören die zu P_1 in bezug auf α und β symmetrischen Punkte P_2, $\overline{P}_2$ der Kurve M_2 an; durchläuft daher P_1 die M_1, so beschreiben die Geraden P_1P_2 und $P_1\overline{P}_2$ Zylinderflächen mit Erzeugenden, die senkrecht zu α und β sind. Hieraus folgt: **Zwei beliebige Meridiane einer Rotationsfläche liegen immer in zwei Zylinderflächen,** deren Erzeugende senkrecht auf den Halbierungsebenen der Meridianebenen stehen. — Halten wir μ_1 fest und lassen μ_2 sich ihr unendlich nähern, so folgt: **Die Berührungsebenen einer Rotationsfläche in den Punkten eines Meridians umhüllen eine Zylinderfläche, deren Erzeugende senkrecht zur Meridianebene sind.** Man kann auch sagen: **Die Tangenten an die Parallelkreise einer Rotationsfläche in den Punkten eines und desselben Meridians bilden eine Zylinderfläche.** Zusammenfassend schließen wir: **Die Tangentialebene in einem Punkte einer Rotationsfläche geht durch die Tangente jenes Punktes des Meridians und steht senkrecht auf der Meridianebene.**

288. Um eine bequeme analytische Darstellung für alle Rotationsflächen zu erhalten, nehmen wir ein gewöhnliches kartesisches System, dessen z-Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt. Es sei

$$x = \xi(t), \quad y = \eta(t), \quad z = \zeta(t) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

die parametrische Darstellung der Erzeugenden. Ein beliebiger Punkt (t) von Γ beschreibt dann einen Kreis, dessen Zentrum auf z in der

Ebene $z = \zeta(t)$ liegt, dessen Radius $\sqrt{\overline{\xi(t)}^2 + \overline{\eta(t)}^2}$ ist; er hat also die Parameterdarstellung

$$x = \sqrt{\overline{\xi(t)}^2 + \overline{\eta(t)}^2} \cos u, \quad y = \sqrt{\overline{\xi(t)}^2 + \overline{\eta(t)}^2} \sin u, \quad z = \zeta(t) \ . \quad (2)$$

Bei Variation von t und u liefern diese Gleichungen auch eine Parameterdarstellung der Fläche. Durch Elimination von u erhält man

$$x^2 + y^2 = \overline{\xi(t)}^2 + \overline{\eta(t)}^2, \quad z = \zeta(t) \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (3)$$

Eliminiert man hieraus noch t, so würde man die Gleichung der Fläche erhalten; doch ist die Operation nicht ausführbar, wenn nicht die Funktionen ξ, η, ζ bestimmt sind. — Nehmen wir im besonderen als Erzeugende die in der xy-Ebene gelegene Meridiankurve, so hat diese die Gleichungen

$$x = \xi(z), \quad y = 0,$$

und die erzeugte Fläche

$$x^2 + y^2 - \overline{\xi(z)}^2 = 0.^{1)} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

Hätte die Meridiankurve aber die Gleichung $f(x, z) = 0$, so würde die Rotationsfläche die Gleichung

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4')$$

haben, die sich natürlich auch rational machen läßt; dann zeigt uns diese Gleichung: **Ist der Meridian eine algebraische Kurve von der Ordnung n, so ist auch die Rotationsfläche algebraisch und von der Ordnung $2n$**; sie würde allein dann auch nur von der Ordnung n sein, wenn die Achse der Fläche eine Symmetrieachse der Kurve wäre. — Schneiden wir die Fläche (4) mit einer durch die Achse gehenden Ebene $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha_1$, so projiziert sich der Schnitt auf die xy-Ebene als die Kurve

$$x_1 = \pm\, \xi(z) \cdot \cos \alpha_1.$$

---

1) Wird (4) nach z aufgelöst, so entsteht eine Gleichung vom Typus $z = F(\sqrt{x^2 + y^2})$. Betrachten wir nun zugleich das Konoid $\frac{y}{x} = f(z)$ (vgl. Nr. 281), so wird sich die Schnittkurve der beiden Flächen auf die xy-Ebene projizieren als die Kurve $\frac{y}{x} = f\left(F(\sqrt{x^2+y^2})\right)$. Führen wir Polarkoordinaten ein, so wird diese Gleichung zu $\omega = \operatorname{arctg} f(F(\varrho))$. Da nun die Wahl der Funktionen f und F noch frei steht, so kann diese als allgemeine Gleichung einer ebenen Kurve angesehen werden; wir können daher mit Th. Olivier den Schluß ziehen: **Jede ebene Kurve kann als die Orthogonalprojektion des Schnittes einer Rotationsfläche mit einem koaxialen Konoid auf eine zur Achse senkrechte Ebene angesehen werden.** Beispiel: Der Kegel $z = c\sqrt{x^2 + y^2}$ und die Fläche $y = x \cdot \operatorname{tg} z$ schneiden sich in einer Kurve, deren Projektion auf die xy-Ebene eine archimedische Spirale ist. Weitere Beispiele finden sich in W. Peyerle, *Ableitung algebraischer Kurven aus dem Durchschnitte von Flächen* (Graz, 1908. Selbstverlag.).

Ebenso würde die Ebene $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha_2$ die projizierte Kurve liefern

$$x_2 = \pm \xi(z) \cdot \cos \alpha_2.$$

Hieraus folgt $\frac{x_1}{x_2} = \pm \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2}$, welches beweist, daß die beiden Kurven affin zueinander sind. Folglich: **Die Ortogonalprojektionen der Meridiane auf eine zur Rotationsachse parallele Ebene sind einander affine Kurven.** Sie entsprechen einander in einer orthogonalen Affinität, deren Achse die Projektion der Rotationsachse ist, was übrigens geometrisch klar ist.

289. Aus (4) folgt, daß die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche im Punkte (x, y, z) lautet:

$$Xx + Yy - \xi(z)\xi'(z) \cdot Z + \left(\overline{\xi(z)}^2 - \xi(z) \cdot \xi'(z)\right) = 0;$$

nun ist diese Ebene senkrecht zu der mit der Gleichung

$$Xy - Yx = 0,$$

und damit wird bestätigt (vgl. Nr. 287), daß die Tangentialebene senkrecht zu der Meridianebene des Berührungspunktes ist.

Wenden wir auf (4) die Darlegungen von Nr. 225 an, so sehen wir, daß wir die parabolische Kurve der Fläche erhalten, wenn wir sie mit der folgenden schneiden:

$$(x^2 + y^2)(\xi \xi'' + \xi'^2) - \xi^2 \xi'^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Nun folgt aber aus (4) und (5), daß

$$\xi^3 \cdot \xi'' = 0,$$

und diese zerfällt in $\xi = 0$ und $\xi'' = 0$. Die Punkte, für die $\xi(z) = 0$, sind die Schnitte des Meridians mit der Achse, und daher im allgemeinen Doppelpunkte; diejenigen, für die $\xi'' = 0$, sind Wendepunkte des Meridians, weshalb wir schließen können: **Die parabolische Kurve einer Rotationsfläche besteht aus den Parallelkreisen, die durch die Wendepunkte des Meridians gehen.**

290. I. Für eine Rotationsfläche lassen sich leicht die Linien gleicher Neigung gegen eine zur Achse senkrechte Ebene bestimmen. Für eine solche Linie muß nämlich $\frac{dz}{ds} = \text{const.} = k$ sein, oder $dz^2 = k^2(dx^2 + dy^2)$. Ist nun $z = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ die Auflösung der Gleichung (4') nach z, so erhält man durch Elimination von z

$$k^2(dx^2 + dy^2) = \left[d\varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\right]^2.$$

Bei Einführung von Polarkoordinaten wird diese zu

$$k^2(d\varrho^2 + \varrho^2 \cdot d\omega^2) = \overline{\varphi'(\varrho)}^2 \cdot d\varrho^2,$$

weshalb

$$\omega = \int \frac{\sqrt{\varphi'(\varrho)^2 - k^2}}{\varrho} \cdot d\varrho,$$

und dies ist die Polargleichung der Projektion der betrachteten Linie auf die genannte Ebene; die Bestimmung dieser Gleichung erfordert eine Integration, die von der Natur der Funktion φ abhängt. — Ist z. B. die Fläche ein Kegel, so ist jede Meridiankurve ein Geradenpaar, und $\varphi'(\varrho)$ konstant; bezeichnen wir seinen Wert mit a, so haben wir

$$\omega = \int \sqrt{a^2 - k^2} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho} = \sqrt{a^2 - k^2} \log \frac{\varrho}{c},$$

oder auch

$$\varrho = c \cdot e^{\frac{\omega}{\sqrt{a^2 - k^2}}},$$

welches (s. S. 85) die Gleichung einer logarithmischen Spirale ist.

Zur Übung. Die Isophoten der Rotationsflächen zu untersuchen.

II. Auf den Rotationsflächen pflegt man noch eine Gruppe wichtiger Linien zu betrachten, nämlich diejenigen, die alle Meridiane unter demselben Winkel λ schneiden. Sie führen den Namen Loxodromen, der zuerst auftrat, als die Geographen solche Linien auf der Kugeloberfläche der Erde betrachteten. Kennt man die Gleichung des Meridians $z = \varphi(x)$, so lassen sich die Projektionen dieser Linien auf eine zur Rotationsachse senkrechte Ebene in Polarkoordinaten durch eine Quadratur finden. Sind M und M_1 zwei aufeinanderfolgende Punkte einer solchen Loxodrome, und schneidet der durch M_1 gehende Parallelkreis den durch M gehenden Meridian in P, so ist MPM_1 ein unendlich kleines, bei P rechtwinkliges Dreieck, während der Winkel bei M gleich λ ist. Hieraus folgt $\operatorname{ctg} \lambda = \frac{M_1 P}{MP}$. Die Strecke MP ist nun das Bogendifferential des Meridians; setzen wir $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, so ist es gleich $\sqrt{d\varrho^2 + dz^2}$. Da aber $z = \varphi(\varrho)$ die Gleichung des Meridians, so ist $dz = \varphi'(\varrho) \cdot d\varrho$ und

$$MP = d\varrho \sqrt{1 + \varphi'(\varrho)^2}.$$

$M_1 P$ ist aber der Bogen des Parallelkreises; wenn also $d\omega$ der Winkel der aufeinanderfolgenden Meridiane ist, so wird sein

$$M_1 P = \varrho \cdot d\omega.$$

Die obige Beziehung wird also zu

$$\operatorname{ctg} \lambda = \frac{d\varrho \cdot \sqrt{1 + \varphi'(\varrho)^2}}{\varrho \cdot d\omega}.$$

Daraus folgt

$$d\omega \cdot \operatorname{ctg} \lambda = \frac{d\varrho \cdot \sqrt{1 + \varphi'(\varrho)^2}}{\varrho}, \quad \text{oder} \quad \omega \cdot \operatorname{ctg} \lambda = \int \frac{d\varrho \cdot \sqrt{1 + \varphi'(\varrho)^2}}{\varrho} + \text{const.}$$

womit die Projektionen der ∞^1 Loxodromen auf die xy-Ebene von der Neigung λ dargestellt sind. — Ist z. B. der Meridian eine Gerade $z = x \cdot \operatorname{tg}\alpha$, die Fläche also ein Kegel, so ist $\omega \cdot \operatorname{ctg}\lambda = \frac{d\varrho}{\varrho \cdot \cos\alpha}$, also $\varrho = \varrho_0 e^{\omega \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\lambda}$, welches eine logarithmische Spirale darstellt. Ist der Meridian ein Kreis mit seinem Mittelpunkt auf der Achse, die Fläche also eine Kugel, so projizieren sich die Loxodromen in Kurven mit folgender Polargleichung:

$$\varrho = \frac{2a}{e^{(\varphi - \varphi_0)\operatorname{ctg}\lambda} + e^{-(\varphi - \varphi_0)\operatorname{ctg}\lambda}}.$$

§ 2. Beispiele von Rotationsflächen.

291. Die elementare Geometrie bietet die einfachsten Beispiele von Rotationsflächen: den geraden Kreiszylinder, den geraden Kreiskegel und die Kugel (welche ∞^2 Rotationsachsen besitzt). Weitere Beispiele liefern die Theorie der Flächen zweiten Grades, in denjenigen Flächen, die durch Rotation eines Kegelschnittes um eine seiner Symmetrieachsen entstehen. Hier sollen noch zwei Beispiele behandelt werden; das erstere wird sich als nützlich für die Lösung mancher Probleme erweisen, das zweite kann zweckmäßig verwandt werden, um an ihm die Lösung einiger Aufgaben der darstellenden Geometrie, die sich auf die Flächen beziehen, an einem konkreten Falle darzulegen.

I. Die Erzeugende sei die beliebige Gerade

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma},$$

oder

$$x = a + t \cdot \cos\alpha, \quad y = b + t \cdot \cos\beta, \quad z = c + t \cdot \cos\gamma,$$

wo t den Parameter bedeutet. Die Gl. (4) S. 249 werden in diesem Falle

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + 2t(a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos\beta) + t^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta),$$
$$z = c + t \cdot \cos\gamma.$$

Durch Elimination von t folgt hieraus

$$x^2 + y^2 - (z-c)^2 \operatorname{tg}^2\gamma - 2(z-c)\frac{a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos\beta}{\cos\gamma} = a^2 + b^2. \quad (6)$$

Man erkennt hieraus: **Die durch Rotation einer beliebigen** (die Achse nicht schneidenden) **Geraden erzeugte Fläche ist ein einschaliges Rotationshyperboloid.** Aus (6) kann man auch ersehen, daß dieselbe Fläche durch Rotation der Hyperbel

$$x^2 - (z-c)^2 \operatorname{tg}^2\gamma - 2(z-c)\frac{a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos\beta}{\cos\gamma} = a^2 + b^2$$

um ihre imaginäre Achse entsteht. Somit erhalten wir den

Satz: Wird eine Fläche durch Rotation einer beliebigen Kurve Γ (die also nicht in einer durch die Rotationsachse gehenden Ebene

liegt) **erzeugt, so bilden die Tangenten von Γ in den aufeinanderfolgenden Punkten desselben Parallelkreises ein einschaliges Rotationshyperboloid.**

II. Die Erzeugende sei ein Kreis, in dessen Ebene auch die Rotationsachse liegt. Als Gleichungen desselben können wir

$$(x-a)^2 + z^2 = r^2, \qquad y = 0$$

nehmen, wenn a den Abstand des Zentrums von der Achse bedeutet. Die Gleichung der erzeugten Fläche folgt dann durch Anwendung von (4′) S. 249 als

$$\left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2 + z^2 = r^2,$$

oder

$$[(x^2+y^2+z^2) + (a^2-r^2)]^2 = 4a^2(x^2+y^2)\,. \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Die Fläche ist also 4ter Ordnung und hat den Anfangspunkt O als Symmetriezentrum. Sie heißt Ringfläche, Ring, Wulstfläche oder Torus, und zwar offene, geschlossene oder verkrüppelte, jenachdem der erzeugende Kreis ganz außerhalb der Achse liegt, diese berührt oder schneidet. Im ersten und dritten Falle hat die Fläche einen Äquator- und einen Kehlkreis, im zweiten Falle wird der letztere zu einem (Selbstberührungs-) Punkt, im dritten Falle hat die Fläche zwei Doppelpunkte. Jede durch die Achse gehende Ebene schneidet den Ring in zwei kongruenten, jede zur Achse senkrechte Ebene in zwei konzentrischen Kreisen. **Es gibt also auf der Ringfläche zwei einfach unendliche Folgen von Kreisschnitten; es gibt noch eine dritte,** wie wir jetzt zeigen wollen. Schneiden wir nämlich die Fläche mit einer, durch die y-Achse gehenden Ebene z. B. mit $z = x \cdot \operatorname{tg}\alpha$, so erhalten wir die kartesische Gleichung der Schnittkurve folgendermaßen. Wir nehmen O als Anfangspunkt, Oy als Achse der Ordinaten u, die Abszissen seien v, dann haben wir in Gl. (7) einzusetzen

$$x = u \cdot \cos\alpha, \quad y = v, \quad z = u \cdot \sin\alpha.$$

Dann erhalten wir die Gleichung

$$(u^2 + v^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(u^2 \cdot \cos^2\alpha + v^2),$$

welche eine aus zwei geschlossenen Zügen bestehende Kurve 4ter Ordnung darstellt. Wenn aber die Ebene den erzeugenden Kreis berührt, so ist $r = a \cdot \sin\varphi$, und dann wird die vorige Gleichung

$$(u^2 + v^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(u^2 + v^2) - 4u^2r^2,$$

oder nach einigen Umformungen

$$(u^2+v^2)^2 - 2(u^2+v^2)(a^2-r^2) + (a^2-r^2)^2 = 4r^2v^2.$$

Diese zerfällt nun in die beiden

$$u^2 + (v \pm r)^2 = a^2;$$

sie stellt zwei Kreise dar mit dem Radius a, deren Mittelpunkte auf

Ov im Abstande r von O liegen. Da nun die xz-Ebene eine beliebige Meridianebene ist, so ist damit die Existenz einer dritten Folge von Kreisschnitten auf der Ringfläche nachgewiesen.

Zur Übung. Gleichung und Eigenschaften der Flächen aufzusuchen, die entstehen, wenn ein Kegelschnitt um eine in seiner Ebene und parallel zu einer seiner Achsen gelegene Gerade rotiert.

§ 3. Darstellung der Rotationsflächen in Orthogonalprojektion.

292. Eine Rotationsfläche läßt sich am allerbesten in Orthogonalprojektion darstellen, indem man die Grundrißebene senkrecht zur Rotationsachse wählt. Dann projiziert sich die letztere als a' in einen Punkt A, während a'' eine zur Grundlinie senkrechte Gerade ist. Der Seitenriß ist immer kongruent mit dem Aufriß. Die Parallelkreise projizieren sich im Grundriß in wahrer Größe als konzentrische Kreise mit dem Zentrum A, im Aufriß als Strecken parallel zur Grundlinie; der größte und der kleinste von ihnen, falls sie existieren, bilden den den ersten scheinbaren Umriß der Fläche. Die Meridiane werden im Grundriß zu Strecken die durch A gehen, einer von ihnen hat seinen Grundriß parallel zur Grundlinie, und dieser stellt sich im Aufriß in wahrer Gestalt und Größe dar und bildet den zweiten sichtbaren Umriß der Fläche. Durch diesen Meridian allein schon ist die Fläche bestimmt, und er heißt wegen der Dienste, die er dem Zeichner leistet, der Hauptmeridian. Von besonderer Wichtigkeit ist daher folgende

Aufgabe: Gegeben die Erzeugende einer Rotationsfläche in Grund- und Aufriß, daraus den Hauptmeridian zu konstruieren.

Aufl.: Es sei $a \equiv (a', a'')$ die Rotationsachse, und $\Gamma \equiv (\Gamma', \Gamma'')$ die Erzeugende. Es sei $P \equiv (P', P'')$ ein beliebiger Punkt von Γ: er liegt in dem Parallelkreise Π der Fläche, der sich als Π'' in die durch P'' zu a_{12} gezogene Parallele, als Π' in den mit $a'P'$ um a' beschriebenen Kreis projiziert (s. Fig. 126). Auf diesem Parallelkreise liegen zwei Punkte M_1 und M_2 des Hauptmeridians; ihre ersten Projektionen sind die Schnitte von Π' mit der durch a' zur a_{12} gezogenen Parallelen p_1; ihre zweiten Projektionen sind die Schnitte der zugehörigen Ordinaten mit Π'. Variieren wir P auf Γ, so variieren die Punkte M'' auf dem gesuchten Aufriß des Hauptmeridians. — [In unserer Figur ist als Erzeugende eine Gerade gewählt; die Fläche wird dann ein einschaliges Rotationshyperboloid, dessen Kehlkreis den Abstand $a'Q'$ des Punktes a' von Γ' als Radius hat. Sind N_1 und N_2 die Punkte, in denen er den Hauptmeridian trifft, so sind N_1'' und N_2'' die Scheitelpunkte der Hyperbel, die den zweiten scheinbaren Umriß der Fläche bildet, und der Punkt O, in welchem die durch Q'' zu a_{12} gezogene Parallele a'' trifft, ist der Mittelpunkt. Da der asymptotische Kegel unseres Hyperboloids zur Öffnung den Winkel γ hat, den die

Gerade Γ mit der Achse bildet, so sind die Asymptoten jenes Umrisses die durch O gezogenen Geraden die mit a'' den Winkel γ bilden].

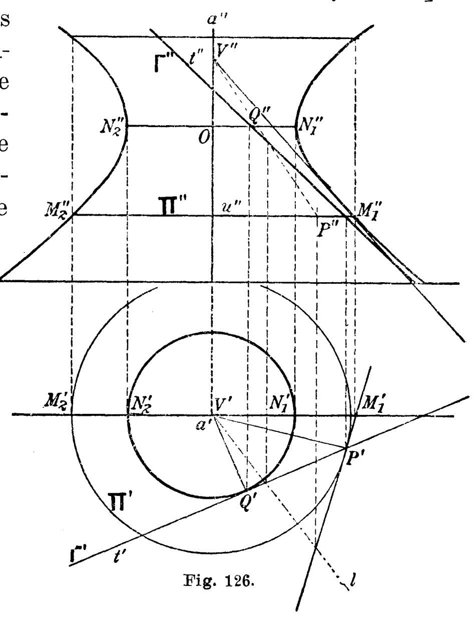


Fig. 126.

Durch ein ziemlich einfaches Verfahren kann man auch die Tangente in einem beliebigen Punkte M_1'' des Hauptmeridians konstruieren. Beachten wir nämlich, daß die Tangenten in P und M_1 an die entsprechenden Meridiane der Fläche in einem Punkte V der Achse zusammenlaufen (s. Nr. 287), und daß dieser Punkt der Schnitt jener mit der Tangentialebene in P an die Fläche ist, so können wir diese Ebene bestimmt denken durch die beiden Geraden, die in P die Erzeugende Γ, und den Parallelkreis Π, berühren. Da nun Γ durch seine Projektionen gegeben ist, so sind t' und t'' die Tangenten in P' und P'' an Γ' und Γ''[1]). u' ist die Tangente in P' an Π', und u'' fällt mit Π'' zusammen. Somit ist die fragliche Tangentialebene bestimmt durch die Geraden t und u. V' fällt in a', und um V'' zu finden, ziehen wir durch V in der Ebene tu die Gerade l; l' ist eine beliebige Gerade durch A; sie schneidet t', u' in zwei Punkten, deren Ordinaten t'', u'' in zwei Punkten treffen, deren Verbindungslinie l'' ist. Diese schneidet a'' in dem Punkte V'', der mit M_1'' verbunden die gesuchte Tangente liefert.

Anmerkungen: I. Ist insbesondere Γ' eine durch a' gehende Gerade, so ist die Erzeugende ein Meridian der Fläche, und die angeführte Konstruktion ermöglicht es, den Hauptmeridian im Aufriß aus dem eines beliebigen anderen zu konstruieren; die Konstruktion bietet eine neue Bestätigung, daß diese Aufrisse sich in einer orthogonalen Affinität mit der Achse a'' entsprechen (vgl. Ende von Nr. 288).

II. Die angeführte Konstruktion gestattet auch, punktweise den Aufriß eines beliebigen Meridians zu konstruieren; man braucht nur die aufgestellte Bedingung fallen zu lassen, daß die durch a' gehende Gerade p_1, parallel zur Grundlinie sei, was, wie leicht einzusehen, keine wesentlichen Veränderungen der vorigen Darstellungen verlangt.

III. Da unsere Konstruktionen es in jedem Falle ermöglichen, den Hauptmeridian zu finden, so kann man sich jede Rotationsfläche mit

1) Natürlich fallen bei der Annahme in Fig. 126 t', t'' mit Γ', Γ'' zusammen.

vertikaler Rotationsachse nur durch Aufriß (des Hauptmeridians) dargestellt denken.[1]) Wir werden jedoch von dieser Darstellung am wenigsten Gebrauch machen.

IV. Wenn die Achse $a \equiv (a', a'')$ nicht senkrecht (oder horizontal) verläuft, so bilden sich die Parallelkreise sowohl im Grund- wie im Aufriß als Ellipsen ab. Betrachten wir z. B. den Parallelkreis Γ in der (zu a senkrechten) Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$ mit dem Zentrum O und den Radius r, so fällt O' auf a', der horizontale Durchmesser d bildet sich ab als d' parallel zu t_1, der dazu senkrechte e als $e' \equiv a'$; da der Winkel de einen Schenkel parallel zur Grundrißebene hat, so bildet er sich auch auf dieser als Rechter ab. Demnach liegen die Achsen der Ellipse Γ' auf d' und a'; die erstere (welche die größere sein möge) hat die Länge $2r$, während die kleinere $2r \cdot \cos\alpha$ ist, wenn α die Neigung von a gegen die Grundebene ist. Alle zu Γ' analogen Ellipsen sind einander ähnlich, haben ihre Mittelpunkte auf a' und parallele Achsen. Dasselbe trifft zu für die Γ''. Die Projektionen zweier beliebiger Meridiane aber bleiben zu einander affine Figuren, mit der entsprechenden Projektion der Rotationsachse als Affinitätsachse.

Zur Übung. Eine Rotationsfläche, deren Achse senkrecht zur Grundebene ist, in der Methode der kotierten Projektion darzustellen. Gegeben sei der Meridian in kartesischer Gleichung; die x-Achse sei der Schnitt der Meridianebene mit der Grundebene, die y-Achse die Rotationsachse. Beispiel: Die glockenförmige Parabel $y^3 - ax^2 + a^3 = 0$.

§ 4. Anwendungen auf einige Probleme.

293. Es soll nun die besprochene Darstellungsmethode zur Lösung einiger häufig vorkommenden Aufgaben über Rotationskörper angewendet werden.

Aufgabe I. Gegeben die eine Projektion eines Punktes der Rotationsfläche, die andere zu finden, wenn die Fläche durch ihre Erzeugende $\Gamma \equiv (\Gamma', \Gamma'')$ und ihre vertikale Achse $a \equiv (a', a'')$ gegeben ist.

Auflösung. Ist etwa P' gegeben (Fig. 127, wo als Linie Γ eine Gerade gewählt ist), so betrachte man den durch P gehenden Parallelkreis Π; sein Grundriß Π' ist der durch P' gehende Kreis mit dem Zentrum in a'. Π' schneide Γ' in M'; die zugehörige Ordinate schneidet dann Γ'' in mehreren Punkten, von denen einer M'' sei; die durch M'' zur Grundlinie gezogene Parallele ist dann Π'' Somit ist P'' der Schnitt von Π'' mit der Ordinate von P'. Ist dagegen die

1) Will man bei dieser Projektion eine ausdrucksvolle Darstellung der Fläche erhalten, so zeichne man außer dem Hauptmeridian auch die Projektionen der Meridiane, die mit diesem Winkel gleich $\frac{2\pi k}{n}$ bilden, wo n eine beliebige Zahl, $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ ist.

Vertikalprojektion Q'' gegeben und man sucht Q', so betrachte man ebenfalls den durch Q gehenden Parallelkreis Π; dann ist die durch Q'' zur Grundlinie gezogene Parallele Π'', und trifft diese Γ'' in N'', so hat man als Π' den um a' mit dem Abstande des Punktes N'' von a'' beschriebenen Kreis zu nehmen. Die zu Q'' gehörende Ordinate schneidet Π' in zwei Punkten, von denen jeder als Q' genommen werden kann. Diese Konstruktion behält vollständig ihre Gültigkeit im Falle, daß die Fläche

Fig. 127.

Fig. 128.

durch ihren Hauptmeridian bestimmt ist. [In der Figur 128 haben wir als Beispiel die Ringfläche genommen; die Erzeugende ist dann ein Kreis, als Γ'' wählten wir den aus zwei zu a'' symmetrischen Kreisen bestehenden Hauptmeridian, als Γ' ergeben sich dann zwei zur Grundlinie parallele zu a' symmetrische Strecken.]

Aufgabe II. Die Tangentialebene in einem beliebigen Punkte der Rotationsfläche zu konstruieren.

Auflösung: Die Data seien wieder (s. dieselbe Figur 127) die Achse $a \equiv (a', a'')$, die Erzeugende $\Gamma \equiv (\Gamma', \Gamma'')$ und der Punkt $P \equiv (P', P'')$. Es genügt, die Tangente p in P an den entsprechenden Parallelkreis Π zu bestimmen und die Tangente l an die entsprechende Lage Λ die Γ einnimmt, wenn sie bei ihrer Rotation durch P geht. Nun hat Π zu Projektionen jenen Kreis Π', und die Gerade Π'', deren Konstruktion vorher angegeben wurde; p' ist also die Tangente an Π' in P',

p'' fällt mit Π'' zusammen. Um l zu finden, betrachten wir einen beliebigen Punkt M von Γ, der mit P auf demselben Parallelkreise liegt und die entsprechende Tangente t von Γ, t' und t'' lassen sich dann konstruieren.[1]) Es sei dann T_1 die erste Spur von t. Während der Bewegung, die Γ in Λ überführt, beschreibt T_1 einen Kreisbogen um a' in demselben Sinne und ähnlich gelegen dem Bogen $M'P'$. Ist nun L_1 die neue Lage, die T_1 einnimmt, so ist $L_1 P' \equiv l'$. Projizieren wir L_1 als L_1'' auf die Grundlinie, so ist $L_1'' P'' \equiv l''$. Durch p und l ist die gesuchte Ebene bestimmt.

Diese Konstruktion vereinfacht sich, wenn der Hauptmeridian gegeben oder nach der Aufgabe in Nr. 293 aus der Erzeugenden konstruiert ist (s. wieder Fig. 128). Dann ist die Tangentialebene durch die Tangente p an den Parallelkreis Π und die Tangente m an dem Meridian in P bestimmt. Die letztere findet man leicht, wenn man beachtet, daß die Tangenten an den Meridian in den Punkten eines Parallelkreises einen mit der Fläche koaxialen Rotationskegel bilden (s. Nr. 286). Insbesondere schneidet die Tangente m in P die Achse a in demselben Punkte V, in welchem auch die Tangente n in dem entsprechenden Punkte M des Hauptmeridians trifft, daher ist m'' die Verbindungslinie von P'' mit dem Punkte $n''a''$.

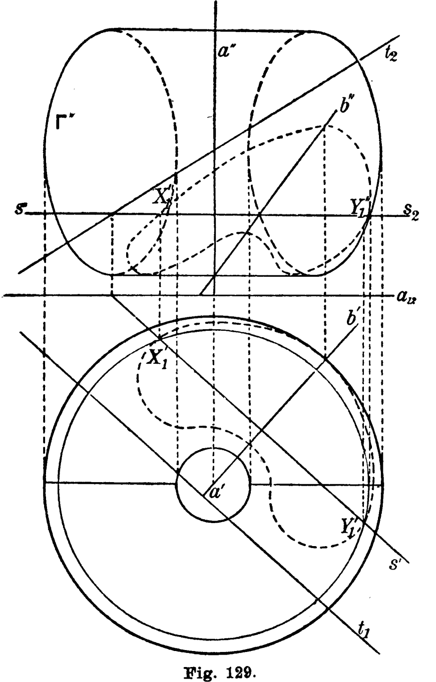


Fig. 129.

294. Aufgabe III. Den Schnitt einer Rotationsfläche mit einer beliebigen Ebene zu bestimmen.

Auflösung. Die Fläche sei wie vorhin bestimmt, die Ebene als $\tau \equiv [t_1, t_2]$. Wir schneiden beide durch eine zur Grundrißebene parallele Ebene σ, deren zweite (zur Grundlinie parallele) Spur s_2 sein möge, und es sei s die Schnittlinie von σ und τ (s. Fig. 129). Dann fällt s'' mit s_2 zusammen, s' läßt sich in bekannter Weise finden. Die Ebene σ schneidet die Fläche in einer gewissen Zahl von Parallelkreisen, die im Grundriß sich als Kreise um a' abbilden und zum Radius die Abstände der Schnittpunkte von σ mit Γ von a haben.[2])

1) Da in unserer Figur Γ eine Gerade ist, so fallen t', t'' bezw. mit Γ', Γ'' zusammen.

2) Es mag bemerkt werden, daß, wenn (wie bei Fig. 129) die Fläche durch

Im Aufriß sind diese Punkte aber die Schnitte von s_2 mit Γ'', also lassen sie sich auch im Grundriß leicht finden. Sind X_1', Y_1'; $X_2', Y_2' \ldots$ die Schnitte von s' mit dem Grundriß jener Parallelkreise, so sind diese die ersten Projektionen gewisser Punkte der gesuchten Schnittkurve Δ; die zugehörigen Ordinaten schneiden dann s_2 in X_1'', Y_1''; $X_2'', Y_2''; \ldots$. Bei Verschiebung von s_2 parallel zu sich selbst erhält man dann punktweise die beiden Projektionen der Kurve Δ. — Es ist zweckmäßig, auch die Gerade b zu zeichnen, in welcher τ von der durch a gelegten Ebene $\beta \equiv [u_1, u_2]$ senkrecht geschnitten wird. u_1 ist dann die durch a' zu t_1 gezogene Senkrechte, und $u_1 \equiv b'$. u_2 ist die im Punkte $u_1 a_{12}$ zur Grundlinie a_{12} errichtete Senkrechte; b'' läßt sich finden, indem man beachtet, daß b der Ebene τ angehört. Da nun b (S. 248) eine orthogonale Symmetrieachse für Δ ist, so ist es auch b' für Δ', während b'' nur eine Achse schiefer Symmetrie für Δ'' ist.

Zur Übung. Wie gestaltet sich die Konstruktion für den besonders interessanten Fall, daß die Ebene parallel zur Achse ist.

Aufgabe IV. Die Schnittpunkte einer Rotationsfläche mit einer Geraden zu bestimmen.

Für die Lösung dieser Aufgabe ist es zweckmäßig anzunehmen, daß der Hauptmeridian M gegeben oder vorgezeichnet sei.

a) Die Gerade sei $g \equiv (g', g'')$ und nicht senkrecht zur Achse (s. Fig. 130). Statt das in Nr. 235 angegebene allgemeine Verfahren für eine beliebige Fläche zu verwenden, das sich auf die Verwendung einer durch g gehenden Hilfsebene gründet, wird man hier besser so verfahren: Man betrachte das

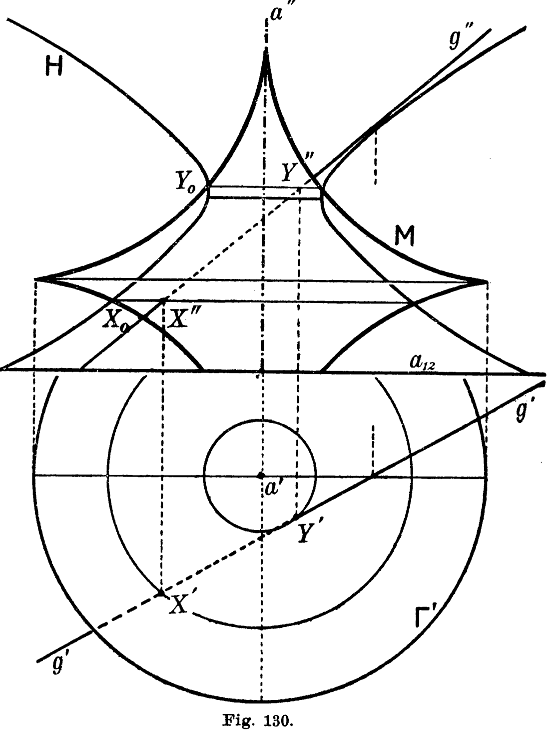


Fig. 130.

einschalige Hyperboloid, das durch Rotation von g um a entsteht und konstruiere (wie in Fig. 126) seinen Hauptmeridian H im Aufriß. Nun beschreiben bei der Rotation von g die auf ihr liegenden gesuchten

ihren Hauptmeridian Γ bestimmt ist, diese Radien die Entfernungen der Schnittpunkte von s_2 und Γ'' von a'' sind.

Punkte X, Y, Z ... ebensoviele Parallelkeise des Hyperboloids und treffen dabei den Hauptmeridian in den Punkten X_0, Y_0, Z_0 ... d. i. in den Schnitten von H mit M. Zieht man nun durch diese Punkte die Parallelen zur Grundlinie, so treffen diese g'' in X'', Y'', Z'' ... dem Aufriß der gesuchten Punkte, die Ordinaten oder auch die Grundrisse jener Parallelkreise treffen dann g' in X', Y' Z' ..., womit die Aufgabe gelöst ist.

Anmerkungen: I. Ist M eine algebraische Kurve n^{ter} Ordnung, so ist die Anzahl der Punkte X_0, Y_0 ... gleich $2n$, und dasselbe gilt für die Auflösungen der in Rede stehenden Aufgabe; damit haben wir eine Bestätigung bzw. einen neuen Beweis des auf S. 249 bewiesenen Satzes.

II. Ähnliche Überlegungen führen zu der **Auffindung der Schnittpunkte einer beliebigen Raumkurve $\mathit{\Lambda}$ mit einer Rotationsfläche.** In diesem Falle betrachten wir statt jenes Rotationshyperboloids, die durch Rotation von $\mathit{\Lambda}$ um a erzeugte Fläche; deren Hauptmeridian schneidet jenen der Fläche in Punkten, deren Parallelkreise $\mathit{\Lambda}$ in den gesuchten Punkten treffen.

b) In dem Falle, daß g die Achse a trifft, oder parallel zu dieser ist, tritt an Stelle jenes Hyperboloids ein Kegel oder Zylinder; die Lösung bleibt im wesentlichen dieselbe, sie ist nur einfacher. Jedoch läßt sich diese nicht verwenden, wenn g senkrecht zu a ist. Dann läßt sich der in Nr. 235 angeführte Gedanke verwenden. Wir legen durch g eine zur Achse senkrechte Ebene: es ist jene, die g'' zur zweiten Spur hat (welche ja zur Grundlinie parallel läuft), und deren erste Spur im Unendlichen liegt. Sie schneidet die Fläche in einer Gruppe von Parallelkreisen, die leicht bestimmt werden können, auch wenn der Hauptmeridian nicht gezeichnet ist. Die Punkte, in denen ihre ersten Projektionen g' treffen, sind X', Y' ..., deren Ordinaten g'' in X'', Y'' ... treffen, den Projektionen der gesuchten Punkte.

295. Aufgabe V. Den Schnitt einer Rotationsfläche mit einer beliebigen Kegel- oder Zylinderfläche zu finden.

Auflösung. Wir betrachten einen beliebigen Parallelkreis der Rotationsfläche und projizieren diesen von dem Scheitel des gegebenen Kegels aus; der projizierende Kegel hat mit dem gegebenen eine gewisse Zahl von Erzeugenden gemeinsam, und diese treffen den Parallelkreis in einer gewissen Zahl von Punkten, die offenbar jenem Schnitt angehören, und bei Variation des Parallelkreises die gesuchte Schnittkurve erzeugen. Ebenso ist zu verfahren, wenn V im Unendlichen liegt, es sich also um einen Zylinder handelt.

Um die Konstruktion auszuführen, nehmen wir an, daß, wie gewöhnlich, die Achse $a \equiv (a', a'')$ der Rotationsfläche gegeben sei, senk-

recht zur Grundrißebene, und der Hauptmeridian M.[1]) Der Kegel sei gegeben durch seine Spitze $V \equiv (V', V'')$ und (vgl. Nr. 253) seine Spur in der Grundebene Δ (Fig. 131). Wir betrachten nun den Parallelkreis Π, dessen Aufriß in die zur Grundlinie parallele Gerade s_2 fällt als Strecke $M''N''$, und dessen Grundriß Π' ein Kreis um a' mit dem Durchmesser $M'N' = M''N''$ ist. Nun betrachten wir den Kegel, der Π von V aus projiziert. Sein Aufriß wird begrenzt von den Geraden $V''M''$, $V''N''$, die die Grundlinie in M_1 und N_1 treffen mögen. Die Mitte O_1 von M_1N_1 ist der Aufriß des Mittelpunktes seines Spurkreises in der Grundebene und seine Achse $V''O_1$ (die auch durch die Mitte von $M''N''$ geht) projiziert sich im Grundriß als $V'a'$, weshalb O_1' der Schnitt von $V'a'$ mit der Ordinate von O_1 ist. Der Spurkreis K in der Grundebene ist also der um O_1' mit dem Radius $O_1'M_1' = O_1N_1'$ beschriebene Kreis. Er schneide Δ in X_1, $Y_1 \ldots$, dann sind diese Punkte, die Spuren der Erzeugenden, die der gegebene Kegel mit dem projizierenden gemeinsam hat, also sind $V'X_1$, $V'Y_1 \ldots$ der Grundriß dieser Erzeugenden, und sie schneiden Π' in $X', \overline{X}'$; $Y', \overline{Y}'; \ldots$, welche Punkte der Grundriß der gesuchten sind; die zugehörigen Ordinaten schneiden dann s_2 in $X'', \overline{X}''$; $Y'', \overline{Y}''; \ldots$ Wird nun s_2 parallel verschoben, so entsteht punktweise die gesuchte Kurve.

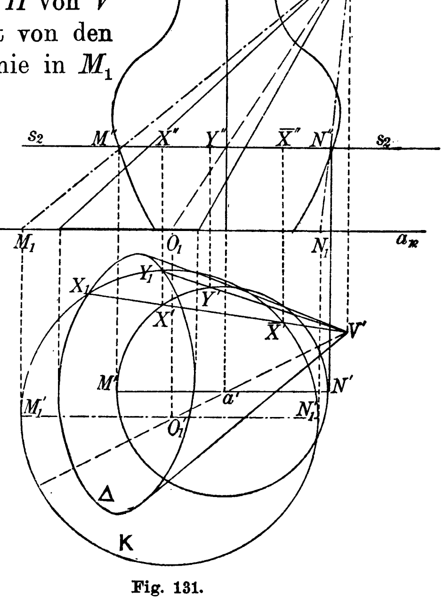


Fig. 131.

Wir überlassen es dem Leser die Konstruktion dem Falle anzupassen, daß an Stelle des Kegels ein Zylinder tritt, der durch seine Spur in der Grundebene, und die Richtung seiner Erzeugenden gegeben ist.

Anmerkung. Im Falle, daß die Fläche ein Kegel oder Zylinder, und die Basis Δ ein Kreis ist, benutzt man besser Parallelebenen zur Grundebene als Hilfsflächen; diese schneiden die fraglichen zwei Flächen beide in Kreisen, deren Darstellung sehr einfach ist.

Zur Übung. Den Schnitt einer Rotationsfläche mit einem geraden Konoid, dessen Leitlinie parallel zur Rotationsachse ist, zu konstruieren.

296. Aufgabe VI. Den Schnitt zweier Rotationsflächen mit a) zusammenfallenden, b) parallelen, c) sich schneidenden Achsen zu finden.

1) Die folgende Lösung bleibt aber im Grunde dieselbe, wenn man die Rotationsfläche durch eine beliebige Kurve bestimmt.

Auflösung: **a)** Der Schnitt besteht offenbar aus den Parallelkreisen, die durch die Schnittpunkte der Hauptmeridiane der beiden Flächen gehen. Sollten die Meridiane nicht gegeben sein, so können sie wie früher (Nr. 292) angegeben konstruiert werden.

b) Eine zu den beiden Rotationsachsen a und b senkrechte Ebene σ schneidet beide Flächen in zwei Gruppen von konzentrischen Kreisen; die Schnittpunkte der beiden Gruppen gehören alle der gesuchten Schnittlinie an, die bei kontinuierlicher Bewegung von σ vollständig erzeugt wird. Um die Darstellung auszuführen, stellt man zweckmäßig die Achsen a und b senkrecht zur Grundrißebene.

Zur Übung. I. Die Konstruktion auszuführen für eine Kugel und einen Kegel. [Bemerkenswert ist, daß die Projektion der Schnittlinie auf eine Ebene die parallel zu der durch die Achse des Kegels und das Zentrum der Kugel gehenden ist, eine Parabel wird.[1]) Ferner ist zu beachten, daß man, um den vollständigen Aufriß der Kurve zu erhalten, zu bemerken hat, daß, wenn auch zwei Kreise sich nicht (in reellen Punkten) schneiden, dennoch die Verbindungslinie ihrer Schnittpunkte, die Radikalachse, reell ist.]

II. Man betrachte zwei gerade Kreiskegel mit parallelen Achsen und die Projektion ihrer Schnittlinie auf eine zu diesen senkrechte Ebene. [Werden die Bezugsebenen passend gewählt, so lassen sich die beiden Flächen darstellen durch

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=\frac{r_1{}^2(z-h_1)^2}{h_1{}^2}; \qquad (x-a_2)^2+(y-b_2)=\frac{r_2{}^2(z-h_2)^2}{h_2{}^2}.$$

Die Projektion der Schnittkurve hat also folgende Gleichung:

$$h_1\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}-h_2\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}=r_2h_2-r_1h_1.$$

Hieraus folgt: **Die Projektion ist der Ort solcher Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten (a_1, b_1) und (a_2, b_2) multipliziert mit gegebenen Konstanten eine konstante Summe liefern,** also ein Kartesisches Oval (s. S. 81). — Wenden wir hier das früher (Nr. 259) angeführte Verfahren, den Schnitt zweier Kegelflächen zu konstruieren, an, so gelangen wir zu folgender planimetrischen Erzeugung des Ovals, die man Chasles verdankt: Gegeben zwei Kreise K_1 und K_2 sowie ein Punkt T der Zentrale; man ziehe durch T Geraden, die K_1 und K_2 in zwei Punkten schneiden. Die Radien von K_1 zu den Schnittpunkten und die von K_2 schneiden sich in vier Punkten, deren geometrischer Ort ein Kartesisches Oval ist. — Wenden wir aber das oben angeführte Verfahren b) an, so erhalten wir eine andere Konstruktion desselben Ovals, woraus man ersieht, daß es aus zwei geschlossenen Zügen besteht, von denen der eine ganz innerhalb des anderen sich befindet.]

c) Schneiden sich die Achsen a und b der beiden Rotationsflächen in einem Punkte C, so führt ein von Monge erdachtes Verfahren zum Ziel. Man denke sich um C mit beliebigem Radius eine Kugel beschrieben; diese schneidet beide Flächen in Parallelkreisen, da diese derselben Kugel angehören, so schneiden sie sich in zwei (reellen oder konjugiert imaginären) Punkten, und da die Kreise beiden Flächen

---

1) Vgl. W. Rulf, Zur Durchdringung der Kugel mit dem geraden Kreiszylinder (Arch. f. Math. u. Phys., 2e Reihe, II. Bd., 1892, S. 433) und Über die Entfernung einer Unstetigkeit in der Geometrie (Monatshefte für Math. u. Phys., IV. Bd., 1893, S. 173).



angehören, so liegen die Punkte auf der gesuchten Schnittlinie. Variiert man den Kugelradius, so erhält man die Kurve vollständig.

Zur Ausführung der Konstruktion nehmen wir für den Aufriß eine zu beiden Achsen parallele Ebene, dann fallen a' und b' in eine zu a_{12} parallele Gerade zusammen, die zugleich den Punkt C' enthält (s. Fig. 132). Die beiden Flächen seien außerdem noch durch den Aufriß Γ'' und Δ'' der in der Ebene ab gelegenen Hauptmeridiane bestimmt. Eine um C mit dem beliebigen Radius r beschriebene Kugel schneidet die Ebene ab in einem größten Kreise, der sich im Aufriß in wahrer Größe als Kreis K'' mit dem Radius r abbildet. K'' schneide Γ'' in M'', Δ'' in P''. Ist N'' der zu M'' in bezug auf a'', Q'' der zu P'' in bezug auf b'' symmetrische Punkt, so stellen die Strecken $M''N''$, $P''Q''$ den Aufriß zweier Parallelkreise der beiden Flächen dar, von denen der erste durch M, der zweite durch P geht. Ist nun X'' der Schnitt der beiden Strecken, so ist dieser der Aufriß eines Punktes der gesuchten Kurve. X' muß zunächst auf der Ordinate von X'' liegen, ferner in einem Abstande von der Geraden $a' \equiv b'$ gleich der wirklichen Entfernung XX'. Um letztere zu finden, legen wir die Ebene eines Parallelkreises, etwa des durch PQ gehenden der zweiten Fläche in die Ebene ab um; er gibt einen Kreis, dessen Umfang sich im Aufriß als ein Kreis mit dem Durchmesser $P''Q''$ darstellt. Die in X'' errichtete Senkrechte schneide den Kreis in (X). Nun tragen wir $\overline{X''(X)}$ vom Schnittpunkte O mit a' aus auf der Ordinate ab und zwar nach beiden Seiten, so daß wir zwei Lagen des Punktes X' erhalten.

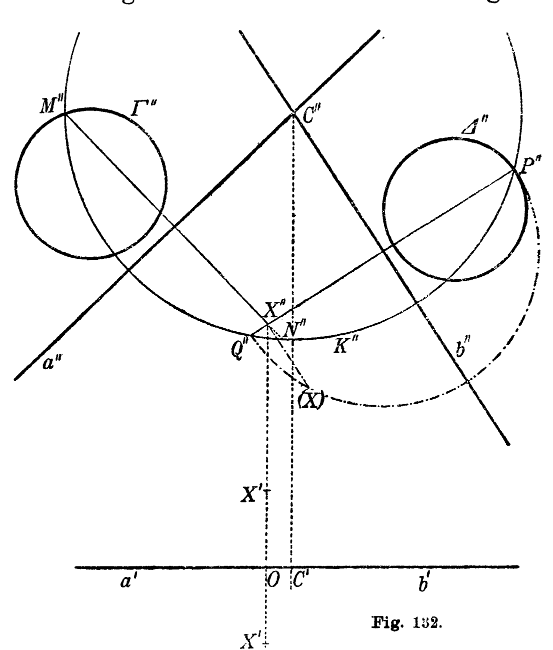


Fig. 132.

Um die Konstruktion noch leichter auszuführen, nehmen wir wieder eine zu a und b parallele Ebene als Aufrißebene und legen die Grundebene senkrecht zur einen Achse a. Dann ist $C' \equiv a'$ die Projektion von $C \equiv (ab)$ (s. Fig. 133). b'' ist eine durch C'' gehende Gerade, b' ist parallel zur Grundlinie durch C' gezogen. Außerdem seien noch im Aufriß die Meridiane Γ und Δ der beiden Flächen in der Ebene ab gegeben. Die um C mit dem Radius r beschriebene Kugel schneidet

nun die Ebene ab in einem größten Kreise, der sich im Aufriß als K″ in wahrer Größe abbildet, als Kreis um C'' mit r beschrieben. K″ schneide Γ in M'' und Δ in P''. M'' mit dem zu a'' symmetrischen Punkte N'' bestimmen eine Strecke, die den Aufriß des Parallelkreises der ersten Fläche darstellt, der durch M geht; sein Grundriß ist der Kreis Π' um a' mit dem Durchmesser $M'N' = M''N''$. Ebenso begrenzen P'' und der zu b'' symmetrische Punkt Q'' eine Strecke, die der Aufriß des Parallelkreises der zweiten Fläche ist, der durch P geht. Haben nun $P''Q''$ und $M''N''$ den Punkt X'' gemeinsam, so ist dieser der Aufriß der beiden gesuchten Schnittpunkte. Seine Ordinate schneidet Π' in X', X_1'. Variieren wir r, so bekommen wir die Projektionen der gesuchten Schnittkurve punktweise.

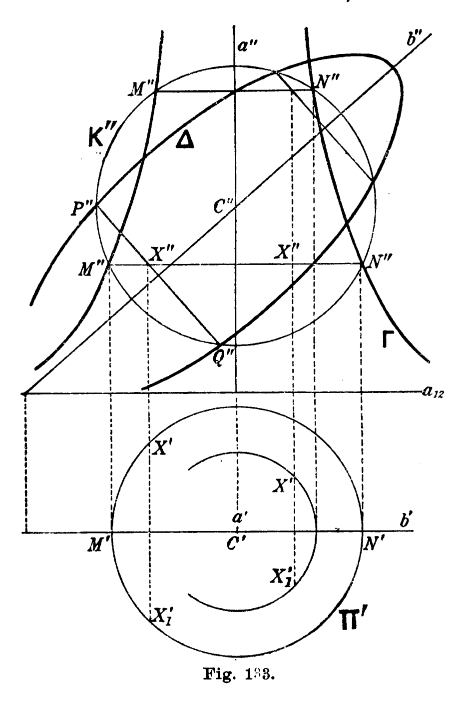


Fig. 133.

Anmerkungen. I. Die angeführte Konstruktion kann durch ein besonderes Verfahren ersetzt werden in dem Falle, daß die Erzeugende der Fläche eine Gerade ist[1]). Die Grundlage dieses Verfahrens bildet folgender Satz: **Zwei Drehflächen 2. O., deren Achsen parallel sind, schneiden sich in einer Kurve, deren Orthogonalprojektion auf diese Ebene ein Kreis ist**[2]). Es seien nun (s. Fig. 134) $a \equiv (a', a'')$ die Achse, $\Gamma \equiv (\Gamma', \Gamma'')$ die erzeugende Gerade der Drehfläche (die also ein einschaliges Hyperboloid ist) und $r \equiv (r', r'')$ die schneidende Gerade. Wir zeichnen den Kehlkreis Π der Fläche und bestimmen den

1) E. Rouché, *Sur l'intersection de l'hyperboloïde de révolution et d'une droite* (Nouv. Ann. de mathém. 3ème Serie, T. I, 1882).

2) Man beweist dies leicht, indem man beachtet, daß die beiden Flächen in der angegebenen Lage sich durch folgende Gleichungen darstellen lassen

$$a(x^2 + y^2) + cz^2 + 2mx + 2ny + p = 0,$$
$$a'(x^2 + y^2) + c'^2 z + 2m'x + 2n'y + p' = 0;$$

eliminiert man hieraus z, so bekommt man

$$(ac' - a'c)(x^2 + y^2) + 2(mc' - m'c)x + 2(nc' - n'c)y + (pc' - p'c) = 0,$$

welches einen Kreis darstellt, und die Projektion des Schnittes der Fläche auf die (Äquator-) xy-Ebene ist.

Schnitt B der Geraden r mit seiner Ebene. Die durch B gehende Vertikale sei b; um b lassen wir nun die Gerade r rotieren, die so einen Rotationskegel erzeugt. Die Kurve, in der er die Fläche schneidet trifft r in den gesuchten Punkten. Die beiden Flächen, der Kegel und das Hyperboloid befinden sich nun in der im obigen Satze angeführten Lage, folglich projiziert sich ihr Schnitt im Grundriß in einen Kreis. Um letzteren zu bestimmen, benutzen wir zwei horizontale Ebenen, deren zweite Spuren t_2 und $t_2{}^*$ sein mögen. Wir zeichnen die beiden Parallelenpaare, in denen sie die beiden Flächen schneiden; im Grundrisse mögen sie sich in P', Q', $P^{*\prime}$, $Q^{*\prime}$, schneiden; diese Punkte gehören einem Kreise an der r' in den Projektionen X', Y' der gesuchten Punkte schneidet. X'', Y'' sind dann die Schnitte der entsprechenden Ordinaten mit r''. Somit ist die Aufgabe nur mit Zirkel und Lineal gelöst.

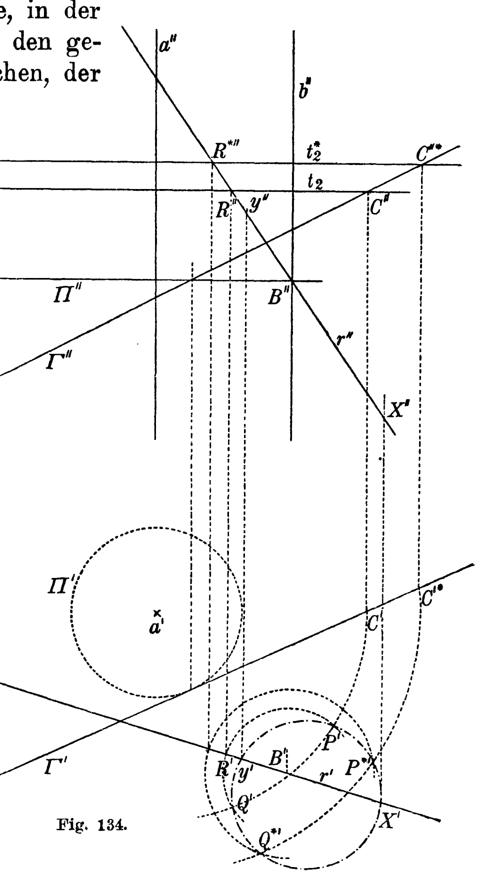


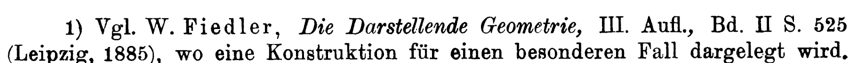
Fig. 134.

II. Ein einfaches und symmetrisches Verfahren, um den Schnitt zweier Rotationsflächen mit windschiefen Achsen zu finden, ist nicht bekannt.[1])

III. Da man eine Kugel als Rotationsfläche mit ∞^2 Achsen auffassen kann, so kann man den Schnitt derselben mit einer Rotationsfläche sowohl nach b) als auch nach c) auffinden.

Zur Übung. I. Gegeben 1. eine Rotationsfläche mit vertikaler Achse a, 2. eine Kugel mit dem Zentrum auf a, 3. ein leuchtender Punkt: den von der Kugel auf die Fläche geworfenen Schatten zu bestimmen.

II. Den Schnitt zweier Rotationsflächen zweiter Ordnung, deren Achsen sich schneiden und zueinander senkrecht sind, darzustellen. Zu zeigen, daß die Projektion des Schnittes auf eine zu beiden Achsen parallele Ebene ein Kegelschnitt ist.[2])



1) Vgl. W. Fiedler, *Die Darstellende Geometrie,* III. Aufl., Bd. II S. 525 (Leipzig, 1885), wo eine Konstruktion für einen besonderen Fall dargelegt wird.

2) H. Drasch, *Bemerkungen zum Aufsatze des H. Rulf* (Monatshefte f. Math. u. Phys., Bd. IV, 1893, S. 378).

297. Aufgabe VII. Die Berührungskurve einer Rotationsfläche mit den von einem außerhalb der Fläche gelegenen Punkte an sie gelegten Tangentialebenen zu bestimmen.

Auflösung. Wir schneiden die Fläche mit einer zur Rotationsachse senkrechten Ebene σ; dadurch erhalten wir einen (oder mehrere) Parallelkreise, längs deren die Fläche von je einem koaxialen Rotationskegel berührt wird[1]). Alle Tangentialebenen dieser Kegel sind auch solche an die Fläche, insbesondere trifft dies zu für zwei solche Ebenen, die auch durch den gegebenen Punkt O gehen, und ihre Berührungspunkte gehören der gesuchten Kurve an. Bei Variation von σ, mit Beibehaltung der Lage, variieren jene Punkte und erzeugen die gesuchte Kurve.

Um die damit skizzierte Konstruktion auszuführen, setzen wir voraus, daß die Fläche durch ihre Achse und den Hauptmeridian bestimmt sei, und bezeichnen die zur Grundlinie parallele Spur der Hilfsebene σ mit s_2; sie schneide (s. Fig. 135) den Aufriß Γ'' des Meridians in M'', $\overline{M}''$; N'', $\overline{N}''$; ... ($\overline{M}''$, $\overline{N}''$, ... symmetrisch zu M'', N'', ... in bezug auf a''). Die Tangenten in den Punkten M'', $\overline{M}''$ an Γ'' mögen a'' in V'' schneiden. Sie bilden dann den Umriß des die Oberfläche längs des Parallelkreises Π berührenden Kegels. Es ist nun $\Pi'' \equiv M''\overline{M}''$, und Π' ist der Kreis um $a' \equiv V'$ mit dem Durchmesser $M'\overline{M}' = M''\overline{M}''$. Π nehmen wir als Basis des Kegels. Ist nun $R \equiv (R', R'')$ der Schnitt der Geraden OV mit der Ebene σ, so gehen die von O an den Kegel gelegten Tangentialebenen, außer durch V auch durch die von R an Π gelegten Tangenten x, y, die sich im Grundriß als die von R' an Π' gezogenen Tangenten darstellen. Ihre Berührungspunkte X', Y' und die Schnitte X'', Y'' der Ordinaten mit s_2 stellen Punkte der gesuchten Kurve dar.

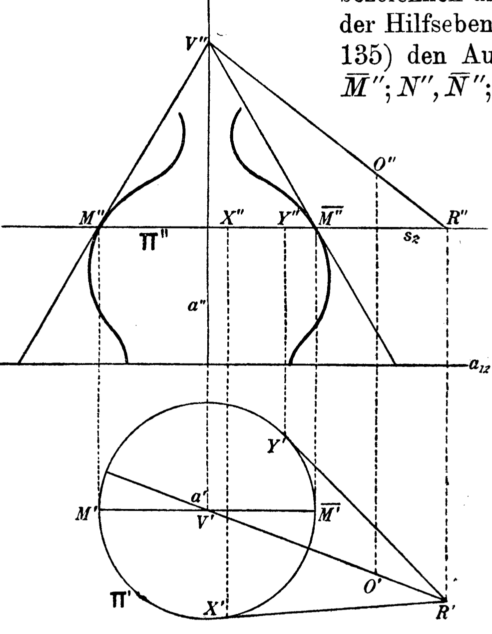


Fig. 135.

Anmerkungen. I. Die Konstruktion behält augenscheinlich auch ihre Anwendbarkeit, wenn O im Unendlichen in gegebener Rich-

1) Eine zweite Lösung würde man erhalten, wenn man die Kugel betrachtet, die die Fläche längs dieses Parallelkreises berührt.

tung liegt, wie auch, wenn die Fläche durch eine beliebige Erzeugende bestimmt wird.

II. Unsere Konstruktion ist im Grunde die der Konstruktion des Selbstschattens der Rotationsflächen im Falle, daß O der leuchtende Punkt ist. Der der Fläche umbeschriebene Kegel mit der Spitze O wird im allgemeinen die Fläche noch in einer weiteren Kurve treffen, die sich nach Aufgabe V konstruieren läßt; sie ist die Begrenzung des von der Fläche auf sich selbst geworfenen Schattens.

Zur Übung. Den Selbstschatten einer offenen Ringfläche zu konstruieren, für den Fall, daß die Lichtstrahlen zueinander parallel und parallel der Aufrißebene laufen, mit der Grundrißebene aber einen Winkel von 45° bilden.

III. Um die durch eine gegebene Gerade g an eine Rotationsfläche gehenden Berührungsebenen zu finden, nehmen wir auf g zwei Punkte und konstruieren die Berührungskurven der von diesen an die Fläche gezogenen Tangenten. Die Schnittpunkte der beiden Kurven sind die Berührungspunkte der gesuchten Ebenen. — Die Konstruktion kann durch eine in folgender Nummer angeführte einfachere Konstruktion ersetzt werden, sowohl wenn g im Endlichen liegt, als auch im Falle, daß g im Unendlichen in einer bestimmten Ebene liegt.

298. Aufgabe VIII. An eine Rotationsfläche die zu einer gegebenen Ebene parallelen Berührungsebenen zu legen.

Auflösung. Es sei $a \equiv (a', a'')$ die vertikale Rotationsachse, Γ'' der Aufriß des Hauptmeridians $\tau \equiv [t_1, t_2]$ die gegebene Ebene. Wir legen (s. Fig. 136) durch a die zu t senkrechte Ebene $\sigma \equiv [s_1, s_2]$, die dann auch senkrecht zur gesuchten Ebene $\xi \equiv [x_1, x_2]$ sein wird. σ und τ schneiden sich in s, und diese Gerade wird auch parallel zu $x \equiv \sigma\xi$ sein. Es ist daher x eine in σ gelegene zu s parallele Tangente an den in σ liegenden Meridian. Um x zu finden, lassen wir σ um die Achse a rotieren, bis sie parallel zur Aufrißebene ist, und bestimmen die neue Lage s^*, die s infolge der Rotation annimmt. Eine zu $s^{*''}$ parallele Tangente an Γ'' kann man als die neue Lage $x^{*''}$ von x ansehen. Drehen wir dann die Ebene σ wieder in ihre alte Lage zurück, so erhalten wir x' und x'' und die Spurpunkte X_1 und X_2 der Geraden $x (x' \equiv s' \equiv s_1)$. Die durch X_1 zu t_1, durch X_2 zu t_2 gezogenen Parallelen (die sich natürlich auf der Grundlinie schneiden müssen, was eine Kontrolle

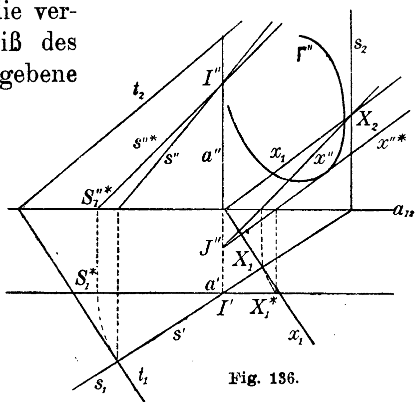


Fig. 136.

für die Zeichnung gibt) sind dann die Spuren der gesuchten Ebene. Solcher Ebenen gibt es soviele als es Tangenten an Γ'' gibt parallel zu $s^{*''}$.

Aufgabe IX. Die durch eine gegebene Gerade gehenden Berührungsebenen einer Rotationsfläche zu bestimmen.

Auflösung. Gegeben seien die Achse $a \equiv (a', a'')$, der Hauptmeridian Γ'' und die Gerade $g \equiv (g', g'')$; $\xi \equiv [x_1, x_2]$ sei eine der gesuchten Ebenen. Wir lassen g um a als Achse rotieren; dann entsteht (vgl. Nr. 291) ein einschaliges Hyperboloid, für welches auch ξ eine Tangentialebene ist. Sein Hauptmeridian sei die Hyperbel Δ (s. Fig. 137). Durch eine geeignete Drehung um a läßt sich nun ξ in eine zur Aufrißebene senkrechte Lage bringen. Ist diese ξ^*, so wird die erste Spur x_1^* senkrecht zur Grundlinie a_{12} sein, und x_2^* eine gemeinsame Tan-

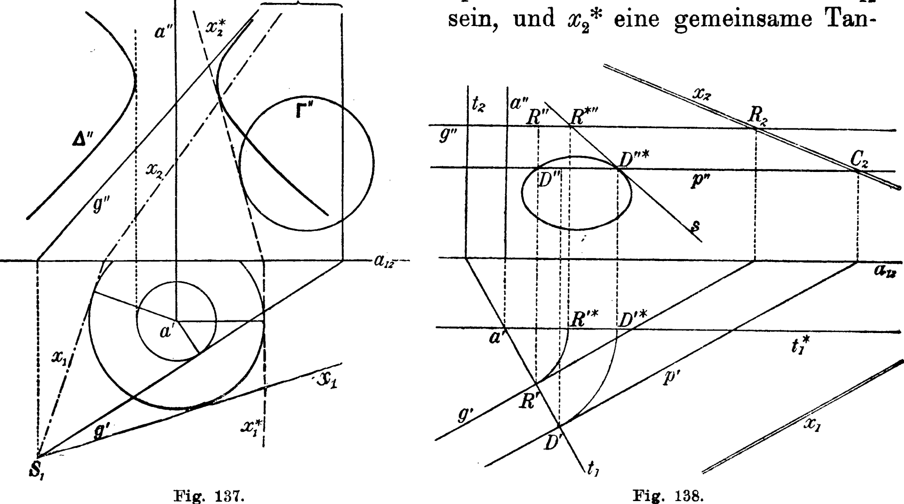


Fig. 137. Fig. 138.

gente an Δ'' und Γ'', man kann also diese Gerade konstruieren. Bringen wir nun ξ in die alte Lage zurück, so wird x_1 Tangente an denselben Kreis um a', der auch x_1^* berührt, und muß durch den Spurpunkt S_1 von g laufen, da auch ξ durch g gehen soll. Aus demselben Grunde muß x_2 durch S_2 laufen und den Punkt $x_1 a_{12}$ enthalten. Hieraus ergeben sich x_1 und x_2, die Spurlinien der gesuchten Ebene. In unserm Beispiel hat die Aufgabe vier Lösungen.

Unsere Konstruktion versagt offenbar, wenn g senkrecht zu a liegt, weil alsdann bei der Rotation von g um a ein Kreis entsteht, dessen Aufriß in g'' fällt. In diesem Falle legen wir durch a eine zu g senkrechte Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$, diese ist dann eine Meridianebene, die auch durch die Berührungspunkte der gesuchten Ebenen geht. Ihre Spuren sind t_1, das von a' auf g' gefällte Lot, und t_2, die im Punkte $t_1 a_{12}$ zu a_{12} errichtete Senkrechte (s. Fig. 138). Es sei dann

$R \equiv (R', R'')$ der Schnitt von g mit τ. Ziehen wir von R aus die Tangente s an den Meridian, so bestimmt diese zugleich mit g die gesuchte Ebene. Um diese konstruieren zu können, lassen wir τ um a rotieren bis es parallel zur Aufrißebene ist; dann nimmt R die neue Lage $R^* \equiv (R^{*\prime}, R^{*\prime\prime})$ an und es sei $D^* \equiv (D^{*\prime}, D^{*\prime\prime})$ der Berührungspunkt der Tangente s an den Hauptmeridian. Bringen wir nun τ in die alte Lage zurück, und erhält D^* dabei die Lage $D \equiv (D', D'')$, so bestimmen D und g die gesuchte Ebene, deren Spuren x_1 und x_2 in bekannter Weise konstruiert werden können.

Anmerkung. Aus der in dieser Nummer dargelegten Konstruktion folgt sogleich (ähnlich wie auf S. 260) der

Satz. Die durch Rotation einer ebenen algebraischen Kurve von der Klasse k um eine in ihrer Ebene liegende Achse a erzeugte Fläche ist im allgemeinen von der Klasse $2k$; ist aber die Kurve symmetrisch zu a, so ist sie von der Klasse k.

Zur Übung. I. Eine Rotationsfläche darzustellen, deren Achse in der Aufrißebene liegt, aber nicht senkrecht zur Grundlinie ist, und deren Meridian eine in dieser Ebene liegende Kurve ist. [Ratsam ist, eine Verlegung der Grundrißebene zu Hilfe nehmen.]

II. Eine Rotationsfläche in Zentralprojektion darzustellen.

III. Man bestimme diejenigen Tangentialebenen einer Rotationsfläche mit vertikaler Achse, die durch einen bestimmten Punkt gehen und mit der Grundrißebene einen bestimmten Winkel bilden.

IV. Gegeben zwei Rotationsflächen mit vertikaler Achse; ist es möglich eine Ebene zu finden, die beide berührt und mit der Grundebene einen gegebenen Winkel bildet?

Sechstes Kapitel.

Die Schraubenflächen.

§ 1. Definitionen und allgemeine Eigenschaften.

299. Lassen wir eine beliebige Raumkurve Γ sich derart im Raume bewegen, daß jeder ihrer Punkte eine gemeine (gerade Kreiszylinder-) Schraubenlinie mit der festen Achse a von derselben Ganghöhe H in bestimmten Sinne beschreibt, so entsteht eine Schraubenfläche $\mathcal{S}$ (auch helikoidale Fläche genannt), Γ heißt die Erzeugende, a die Achse und H die Ganghöhe von $\mathcal{S}$. Man kann sich $\mathcal{S}$ auch entstanden denken durch gleichförmige Rotation von Γ um a zugleich mit einer gleichförmigen Verschiebung parallel zur Achse, die während einer vollständigen Umdrehung die Größe H hat. Es ist klar, daß man die Kurve Γ auch durch jede andere beliebig auf $\mathcal{S}$ gezeichnete Kurve ersetzen darf, wofern diese nur alle Schraubenlinien der Fläche trifft. Insbesondere kann man als Erzeugende einen durch die Achse gehenden Schnitt, den sog. Meridian, wählen. Alle Meri-

diane sind offenbar identische Kurven, und da sie aus unendlich vielen kongruenten Teilen bestehen, so sind sie überdies periodische Kurven. Wenn die Erzeugende Γ die Achse in einem Punkte S schneidet oder berührt, so reduziert sich die von S erzeugte Schraubenlinie auf die Achse; sie gehört dann der Fläche an, und diese ist dann geschlossen, im anderen Falle heißt sie offen. Die zur Achse senkrechten sog. **Normalschnitte** von $\mathcal{S}$, sind identische, also kongruente Kurven; dasselbe gilt auch für alle, durch zueinander parallele Ebenen erzeugten Schnitte ausgenommen, wenn sie zur Achse parallel sind.

Die in der Definition benutzte Bewegung kann man zweckmäßig herbeiziehen, um Eigenschaften dieser Flächen zu entdecken oder zu beweisen. So ist klar, wenn ein Punkt P oder eine Ebene ϵ eine bestimmte Beziehung zu $\mathcal{S}$ haben, daß diese auch für alle Punkte oder Ebenen stattfindet, die von P oder ϵ durch die angenommene Schraubung erzeugt werden. Beispielsweise: wenn Γ einen Doppelpunkt D hat, so hat $\mathcal{S}$ die durch D erzeugte Schraubenlinie als Doppellinie; ist π die Ebene, die $\mathcal{S}$ in P berührt, so wird $\mathcal{S}$ auch von allen analogen Ebenen längs der durch P erzeugten Schraubenlinie berührt. Hieraus folgt: **Während die ∞^2 Punkte einer Schraubenfläche auf ∞^1 Schraubenlinien verteilt sind** (mit derselben Achse und Ganghöhe), **verteilen sich die entsprechenden ∞^2 Tangentialebenen auf ∞^1 analoge abwickelbare Schraubenflächen.** Ist ferner P ein parabolischer Punkt von $\mathcal{S}$, so sind auch alle entsprechenden Punkte parabolisch; folglich: **Die parabolische Kurve einer Schraubenfläche besteht aus einer Gruppe von Schraubenlinien.**

Aus dem Vorigen ersehen wir nun, daß durch jeden Punkt von $\mathcal{S}$ vier bemerkenswerte Linien gehen 1. die entsprechende Lage der Erzeugenden Γ, 2. eine Schraubenlinie, 3. ein Meridian, 4. ein Normalschnitt. Die Tangenten an zwei von diesen Kurven in P sind notwendig und hinreichend, die zugehörige Tangentialebene zu bestimmen. Im allgemeinen wird man die beiden ersten Kurven nehmen, da man (vgl. Nr. 220) die beiden Tangenten erhalten kann, wenn man nur die Tangente von Γ zu konstruieren weiß.

300. Um eine bequeme analytische Darstellung der Schraubenfläche zu erhalten, nehmen wir ein gewöhnliches kartesisches System, in welchem die z-Achse mit der Achse von $\mathcal{S}$ zusammenfällt, und nehmen die parametrische Darstellung von Γ als bekannt an, nämlich als

$$x = \xi(t), \quad y = \eta(t), \quad z = \zeta(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dann ist die vom Punkte (t) erzeugte Schraubenlinie folgender parametrischer Darstellung fähig, wenn u den Parameter und h die reduzierte Ganghöhe $\frac{H}{2\pi}$ bedeutet:

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi(t)\cdot\cos u - \eta(t)\cdot\sin u \\ y &= \xi(t)\cdot\sin u + \eta(t)\cdot\cos u \\ z &= \zeta(t) + hu \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Bei Variation der t und u erhalten wir die ∞^2 Punkte von $\mathcal{S}$; die Kurven $t = \text{const.}$ sind die ∞^1 Schraubenlinien, die $u = \text{const.}$ die ∞^1 Lagen der Erzeugenden von $\mathcal{S}$. Setzen wir $y = 0$, so erhalten wir die in der xz-Ebene liegende ebene Schnittkurve dargestellt als

$$x = \sqrt{\overline{\xi(t)}^2 + \overline{\eta(t)}^2}, \quad z = \zeta(t) - h\cdot\operatorname{arctg}\frac{\eta(t)}{\xi(t)};$$

es ist der Meridian.

Aus (2) folgt, wenn wir $x^2 + y^2 = \text{const.}$ setzen, daß auch $\overline{\xi(t)}^2 + \overline{\eta(t)}^2 = \text{const.}$, also auch $t = \text{const.}$, also: **Jeder mit $\mathcal{S}$ koaxiale Kreiszylinder schneidet die Fläche in einer Gruppe von Schraubenlinien** der vorhin betrachteten Art.

Nehmen wir, was ja gestattet ist, als Erzeugende den (in der xz-Ebene gelegenen) Meridian selbst, so wird die Funktion $\eta(t)$ identisch $= 0$; die Gl. (2) vereinfachen sich dann zu

$$x = \xi(t)\cdot\cos u, \quad y = \xi(t)\cdot\sin u, \quad z = \zeta(t) + hu \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Punkte, für die $\xi'(t) = 0$, haben einen Maximal- oder Minimalabstand von der Achse und erzeugen im ersten Falle die **Äquatorialschraubenlinien**, im zweiten Falle die **Kehlschraubenlinien.**

Kennt man von dem in der xz-Ebene gelegenen Meridian statt der parametrischen Darstellung die Gleichung

$$f(\xi, \zeta) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

so läßt sich $\mathcal{S}$ durch eine einzige Gleichung darstellen, die man erhält, wenn man u, ξ, ζ aus den Gl. (4) und

$$x = \xi\cdot\cos u, \quad y = \xi\cdot\sin u, \quad z = \zeta + hu$$

eliminiert; nun liefern diese

$$\xi = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad \zeta = z - h\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

also wird die Gl. (4) zu

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2},\ z - h\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und dies ist die gesuchte Punktgleichung der Schraubenfläche.

Zur Übung. Man wende die Gl. (5) an zur Untersuchung der Isophoten einer Schraubenfläche.

Wenn man in Gl. (5) $z = \text{const.} = z_0$ setzt, so bekommt man die Projektion der Kurve Δ, in welcher $\mathcal{S}$ von der Ebene $z = z_0$ geschnitten wird, auf die xy-Ebene; Δ' ist identisch mit Δ und hat die Polargleichung

$$f(\rho, z_0 - h\omega) = 0.$$

Halten wir nun den Pol fest, verlegen aber die Polarachse in der Weise, daß $z_0 - h\omega = h\theta$, wo θ die neue Anomalie bedeutet, so läßt sich die vorige Gleichung schreiben als

$$f(\varrho, h\theta) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

und da diese nicht mehr die Größe z_0 enthält, so ergibt sich auch hieraus, daß alle Normalschnitte einer Schraubenfläche identische Kurven sind. Bemerkenswert ist nun, daß die durch (6) dargestellte Kurve Δ' bzw. Δ aus der in kartesischen Koordinaten durch Gl. (4) dargestellten Kurve Γ durch die Transformation $\xi = \varrho$, $\zeta = h\omega$ entsteht, welche eine Varignonsche Koordinatenverwandlung (s. S. 88, X) ist. Die obigen Darlegungen liefern also eine stereometrische Konstruktion dieser Transformationskurve, die Chasles[1]) zuerst bemerkt hat, indem durch jeden Punkt von Δ eine Schraubenlinie der Fläche geht, die die xz-Ebene in dem entsprechenden Punkte von Γ schneidet.

301. Aus der allgemeinen Form für die Gleichung der Tangentialebene einer Fläche, deren Parameterdarstellung bekannt ist (S. 144), folgt für die durch (3) dargestellte Fläche

$$\begin{vmatrix} x - \xi \cdot \cos u + \eta \cdot \sin u & y - \xi \cdot \sin u - \eta \cdot \cos u & z - (\zeta + hu) \\ \xi' \cdot \cos u - \eta' \cdot \sin u & \xi' \cdot \sin u + \eta' \cdot \cos u & \zeta' \\ -\xi \cdot \sin u - \eta \cdot \cos u & \xi \cdot \cos u - \eta \cdot \sin u & h \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

als Gl. der Tangentialebene, die, wenn man x, y, z als gegeben ansieht, auch in den Koordinaten t, u die Berührungskurve der Schraubenfläche mit dem Kegel, dessen Spitze (x, y, z) ist, darstellt. Insbesondere stellt die folgende Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \xi' \cdot \cos u - \eta' \cdot \sin u & \xi' \cdot \sin u + \eta' \cdot \cos u & \zeta' \\ \xi \cdot \sin u + \eta \cdot \cos u & \xi \cdot \cos u - \eta \cdot \sin u & h \end{vmatrix} = 0$$

der Berührungskurve von $\mathfrak{S}$ mit dem der Fläche umbeschriebenen Zylinder, dessen Erzeugende die Richtungskosinus α, β, γ haben, dar. Da nun diese Gleichung von der Form ist

$$p \cdot \cos u + q \cdot \sin u + r = 0,$$

wo p, q, r Funktionen von t bedeuten, und für jeden Wert von t zwei zwischen 0 und 2π gelegene Wurzeln u zuläßt[2]), so folgt: **Auf jeder Windung einer Schraubenfläche gibt es im allgemeinen zwei Punkte** (reell und getrennt, zusammenfallend oder konjugiert imaginär) **von der Art, daß die zugehörigen Tangentialebenen einer gegebenen**

1) M. Chasles, *Aperçu historique*, II éd. (Paris, 1875) Note VIII.

2) Um dies zu erkennen, genügt es, als neue Unbekannte $\omega = \operatorname{tg}\frac{u}{2}$ zu nehmen; dann erhält man eine in ω quadratische Gleichung.

Geraden parallel laufen. Diese Eigenschaft findet eine nützliche Anwendung bei der Untersuchung der Schattengrenze einer Schraubenfläche, die von einem unendlich fernen Punkte aus beleuchtet gedacht wird.

§ 2. Die Schraubenregelflächen.

Von den Schraubenflächen bieten ein besonderes Interesse diejenigen, die durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden; es sind die sog. Schraubenregelflächen, mit denen wir uns hier zuerst beschäftigen wollen.

I. Die abwickelbare Schraubenfläche.

302. Bewegt sich die erzeugende Gerade derart, daß der Punkt Q, der den kleinsten Abstand r von der Achse a hat, eine Schraubenlinie durchläuft, deren Steigung $\varkappa$ gleich dem Komplement des Winkels γ ist, den die Gerade mit a bildet, so entsteht eine abwickelbare Schraubenfläche. Oder anders ausgedrückt: Die Fläche wird erzeugt von den Tangenten einer gewöhnlichen Schraubenlinie Σ, die dann (vgl. Nr. 197) die Rückkehrkante der Fläche ist. Aus den Gleichungen (3) in Nr. 218 folgt, daß unsere Fläche analytisch auf folgende Weise darstellbar ist:

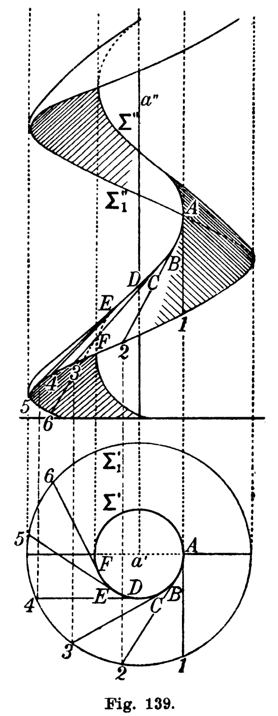


Fig. 139.

$$x = r(\cos t - u \cdot \sin t),$$
$$y = r(\sin t + u \cdot \cos t), \quad z = h(t + u).$$

Nehmen wir für die graphische Darstellung von Σ als Projektionsebenen dieselben Ebenen, wie die Koordinatebenen, so projizieren sich die Erzeugenden als Geraden, deren Darstellung wir seiner Zeit (Nr. 220) dargelegt haben. Um eine klare Vorstellung von der Fläche zu erhalten, bilden wir nur einen Teil derselben ab, indem wir den Tangenten eine bestimmte Länge l geben. Dann projizieren sich diese im Grundriß als Tangenten von Σ' (s. Fig. 139) und erhalten alle die Länge $l' = l \cdot \cos\varkappa$, wenn $\varkappa$ die Steigung $\left(\operatorname{tg}\varkappa = \frac{H}{2r\pi}\right)$ ist. Ihre Endpunkte liegen daher alle auf einem Kreise Σ_1' vom Radius $r_1 = \sqrt{r^2 + l'^2}$. In Wirklichkeit liegen diese Punkte also wieder auf einer Schraubenlinie Σ_1, und diese hat die Steigung $\operatorname{tg}\varkappa_1 = \frac{H}{2r_1\pi}$; im Aufriß liefert diese wieder eine Sinuslinie Σ_1''. Ein Stück des zweiten Umrisses (in der Figur bei D beginnend)

ergänzt dann das Bild der Fläche[1]). Je weiter wir uns von der Achse entfernen, desto flacher werden die Schraubenlinien, so daß die Fläche nach außen hin immer mehr kegelförmig wird.

Ein beliebiger Punkt P' der Grundrißebene, der außerhalb des Kreises Σ' liegt, in den sich die Schraubenlinie projiziert — denn die Fläche tritt nicht in das Innere des über Σ' errichteten Zylinders ein — ist Projektion von unzählig vielen Punkten der Fläche. Um diese zu bestimmen, ziehen wir von P' an Σ' die Tangenten, die in Q' und R' berühren. Sind nun Q'' bzw. R'' irgendwelche von den entsprechenden Punkten des Aufrisses der Schraubenlinie, und q'' bzw. r'' die zugehörigen Tangenten, so liefert der Schnitt der Ordinate von P' mit q'' oder r'' die Punkte P''. In ähnlicher Weise kann man zu P'' den Punkt P' finden. — Die Schnittlinie der Fläche mit der Grundrißebene, also auch mit jeder zur Achse senkrechten Ebene, hat die Gleichung:

$$x = r(\cos t + t \cdot \sin t), \quad y = r(\cos t - t \cdot \sin t);$$

sie ist daher eine Kreisevolvente (s. S. 86). Denkt man sich die Tangenten nach beiden Seiten verlängert, so erhalten wir die beiden Zweige der Kurve, und da diese unendlich viele Doppelpunkte hat, so hat die Fläche unendlich viele Schraubenlinien als Doppellinien.

Zur Übung. Den Schnitt der abwickelbaren Schraubenfläche mit der Vertikalebene zu bestimmen.

II. Die Konoid-Schraubenfläche.

303. Eine andere Schraubenregelfläche gehört den Konoiden an und heißt daher Konoid-Schraubenfläche (auch gerade, flachgängige, Minimalschraubenfläche, Meusniersche oder Schraubenfläche mit quadratischer Öffnung oft auch Wendelfläche genannt). Sie entsteht, wenn man von allen Punkten einer gewöhnlichen Schraubenlinie die Lote auf die Achse fällt. Da zwei beliebige dieser Geraden sich nicht schneiden, so ist diese Fläche nicht abwickelbar. Um ihre analytische Darstellung zu erhalten, nehmen wir an, daß die Leitlinie in derselben Weise dargestellt sei wie in Nr. 216. Dann lassen sich die Erzeugenden offenbar darstellen durch zwei Gleichungen wie

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi, \quad z = h\varphi, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

und durch Elimination von φ erhält man als Gleichung der Fläche

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{h}. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

---

1) Verlängert man die Tangenten auch nach der anderen Seite, oder zeichnet das zu einer durch A gezogenen Horizontalen symmetrische Bild, so erhält man den andern Teil der Fläche, von dem man auch eine Vorstellung erhält, wenn man die Fig. 139 auf den Kopf stellt.

Graphisch läßt sich die Fläche leicht nach der Mongeschen Methode darstellen, wenn man die Leitlinie in der üblichen Weise darstellt (s. Fig. 140). Dann projizieren sich die Erzeugenden im Grundriß als Geraden durch den Punkt a', im Aufriß als Senkrechte zu a'', resp. als Parallele zur Grundlinie. Auf jeden Radius $a'P'$ projizieren sich alsdann unzählig viele Erzeugende der Fläche, nämlich alle diejenigen die zum Aufriß die Parallelen zur Grundlinie haben, die durch die Schnitte der Ordinate von P' mit dem Aufriß der Leitlinie gehen. Will man nun für die Punkte, deren Grundriß M' ist, den Aufriß finden, so braucht man nur die Schnitte der Ordinate von M' mit dem Aufriß g'' derjenigen Geraden zu bestimmen, die $a'M'$ zum Grundriß haben. — Ist hingegen M'' gegeben, und man will M' finden, so zieht man durch M'' die Parallele zur Grundlinie und bestimmt den Schnitt P'' mit dem Aufriß der Schraubenlinie. Ist nun P' der entsprechende Punkt im Grundriß, so ist M' der Schnitt von $a'P'$ mit der Ordinate von M''.

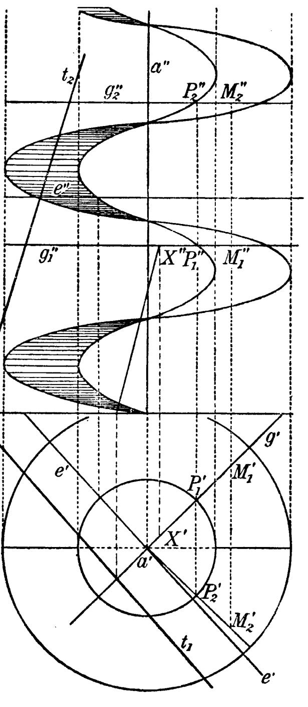


Fig. 140.

304. Ein mit der Fläche koaxialer Zylinder, dessen analytische Darstellung

$$x^2 + y^2 = l^2, \quad \text{oder} \quad x = l \cdot \cos\omega,\ y = l \cdot \sin\omega$$

ist, schneidet die Fläche in einer Kurve, die durch diese und durch Gl. (1) dargestellt wird. Setzen wir nun jene Werte von x, y in diese ein, so erhalten wir $\operatorname{tg}\omega = \frac{z}{h}$; jene ist daher folgender Darstellung fähig

$$x = l \cdot \cos\omega, \quad y = l \cdot \sin\omega, \quad z = h \cdot \omega \ldots\ldots \quad (3)$$

Die Schnittkurve ist also eine Schraubenlinie, die mit der gegebenen die Achse und die Ganghöhe gemeinsam hat[1]); solcher Linien enthält also die Fläche ∞^1, was auch mit der allgemeinen Bemerkung auf S. 270 übereinstimmt. Durch jeden Punkt M der Fläche geht eine solche Linie, und die Tangente an sie in M und die durch M gehende Erzeugende der Fläche bestimmen die Tangentialebene in M an die Fläche. Aus der Gl. (2) geht hervor (vgl. Nr. 218), wenn γ der Winkel der Tangenten der neuen Schraubenlinie gegen die Achse ist, daß

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{l}{h}, \quad \text{oder} \quad l \cdot \operatorname{ctg}\gamma = h \ \text{ist.}$$

1) Hiervon ist bei der Darstellung in Fig. 140 nützliche Anwendung gemacht.

Dies zeigt uns: **Die gerade Schraubenfläche wird von jedem koaxialen Zylinder in einer Schraubenlinie geschnitten, die die Erzeugenden des Zylinders unter einem Winkel schneidet, dessen Kotangens umgekehrt proportional dem Radius jenes Zylinders ist.**[1])

Unsere Fläche enthält aber noch ∞^2 weitere Zylinderschraubenlinien. Schneiden wir sie nämlich mit einem geraden Kreiszylinder dessen Achse durch die Achse der Fläche geht, so wird dieser durch die Gleichung dargestellt werden:

$$x^2 + y^2 - 2rx \cdot \cos\alpha - 2ry \cdot \sin\alpha = 0,$$

oder durch das System

$$x = l(\cos\alpha + \cos\omega), \quad y = l(\sin\alpha + \sin\omega).$$

Kombinieren wir diese Gleichungen mit (2), so erhalten wir

$$\frac{\sin\alpha + \sin\omega}{\cos\alpha + \cos\omega} = \operatorname{tg}\frac{z}{h},$$

also wird

$$z = h \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha + \omega}{2}\right).$$

Dies zeigt uns, daß der Schnitt der betrachteten Schraubenfläche mit dem besagten Zylinder folgender parametrischer Darstellung fähig ist:

$$x = l \cdot \cos\alpha + r \cdot \cos\omega, \quad y = l \cdot \sin\alpha + l \cdot \sin\omega, \quad z = \frac{h}{2}(\alpha + \omega).$$

Er ist daher eine Zylinderschraubenlinie, deren Ganghöhe die Hälfte der der gegebenen ist; sie hat den Namen exzentrische Schraubenlinie; es gibt deren ∞^2 auf der Fläche.

Zu den exzentrischen Schraubenlinien gelangt man auch, wenn man die Linien gleicher Neigung λ gegen eine zur Achse senkrechte Ebene sucht. Da nämlich für eine solche Kurve $\frac{dz}{ds} = \sin\lambda$ sein muß, so ist weiterhin $dx^2 + dy^2 = dz^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\lambda$, oder wegen Gl. (2)

$$dx^2 + dy^2 = h^2 \operatorname{ctg}^2\lambda \cdot \left(d \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2.$$

Dies ist die Differentialgleichung der Horizontalprojektion der betr. Kurve. Führt man nun Polarkoordinaten ein, so wird

$$d\varrho^2 + \varrho^2 \cdot d\omega^2 = h^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\lambda \cdot d\omega^2,$$

oder

$$d\omega^2 = \frac{d\varrho}{\sqrt{h^2 \operatorname{ctg}^2\lambda - \varrho^2}}.$$

Wird integriert, und ist α die Integrationskonstante, so ist

$$\omega + \alpha = \arcsin\frac{\varrho \cdot \operatorname{tg}\lambda}{h},$$

1) F. Lucas, *Mémoire sur les propriétés géométriques de l'arche biaise,* Journ. de l'Ec. pol. XXXVIII cah., 1861, S. 9.

und wenn man wieder zu kartesischen Koordinaten zurückgeht

$$(x^2 + y^2)\cdot\frac{\operatorname{tg}\lambda}{h} = x \sin\alpha + y\cdot\cos\alpha.$$

Nun stellt diese Gleichung einen Kreis durch den Anfangspunkt dar, also sind die Linien gleicher Neigung nicht verschieden von den exzentrischen Schraubenlinien, wie oben gesagt war.

Ein dritter Weg, um zu denselben Kurven zu gelangen, wird zu Ende der folgenden Nr. beschritten.

305. Wir nehmen auf der Schraubenfläche eine Erzeugende e und legen durch sie eine beliebige Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$. Dann betrachten wir eine beliebige Erzeugende g der Fläche und konstruieren den Punkt $X \equiv (X', X'')$, in dem g die τ trifft (s. die vorige Fig. 140). Variieren wir g, so variiert auch X und beschreibt eine Kurve, von der man auch punktweise die beiden Projektionen erhalten kann. Um analytisch die erste Projektion zu bestimmen, wollen wir die Erzeugende e als die durch den Wert α des Winkels φ (vgl. Gl. (1)) festgelegte annehmen, dann hat die Gleichung von τ die Form

$$x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha + \mu(z - h\alpha) = 0.$$

Eliminieren wir z aus dieser und aus Gl. (2), so entsteht die Gleichung des Grundrisses der besagten Kurve; sie ist also

$$x \sin\alpha - y \sin\alpha + \mu h\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \alpha\right) = 0.$$

Gehen wir zu Polarkoordinaten über, bekommen wir

$$\varrho \sin(\alpha - \omega) + \mu h(\omega - \alpha) = 0,$$

oder, wenn wir die Polarachse verlegen, indem wir $\alpha - \omega = \theta$ setzen

$$\varrho = \mu\alpha\,\frac{\theta}{\sin\theta}.$$

Diese Gleichung stellt nun die auf S. 85 beschriebene Quadratrix dar, und somit haben wir den folgenden:

Satz des Pappus: Schneiden wir die Wendelfläche mit einer durch eine Erzeugende gehenden Ebene, so erhalten wir eine Kurve, deren Orthogonalprojektion auf eine zur Achse senkrechte Ebene eine Quadratrix des Dinostratus ist.

Zur Übung. I. Man konstruiere und bestimme die Gleichung der Horizontalprojektion des Schnittes einer beliebigen Ebene mit der geraden Schraubenfläche. (Man erhält eine sog. verlängerte oder verkürzte Quadratrix.)

II. Wie verhält es sich mit der Darstellung der Schraubenfläche in der Methode der kotierten Ebenen?

Aus der Gl. (2) ergibt sich die Gleichung der Tangentialebene in einem Punkte (x, y, z) der Fläche selbst als

$$h(Xy - Yx) + (Z - z)(x^2 + y^2) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wenn X, Y, Z die laufenden Koordinaten sind. Wenn man hingegen in dieser Gleichung die X, Y, Z als gegeben ansieht, so stellt sie eine Fläche dar, die die Schraube in der Berührungslinie mit dem ihr vom Punkte (X, Y, Z) umbeschriebenen Kegel schneidet. Diese Gleichung ist nun vom 3ten Grade in x, y, z, also: **Der scheinbare Umriß einer Wendelfläche gesehen von einem in Endlichen gelegenen Punkte des Raumes ist eine transzendente Kurve, die aber auf einer algebraischen Fläche dritter Ordnung liegt.** Die Fläche enthält die Schraubenachse und die unendlich ferne Grade der zu ihr senkrechten Ebenen, von denen sie in Kreisen geschnitten wird; letztere haben als geometrischen Ort ihrer Zentra einen Kegelschnitt, der in einer durch die Achse gehenden Ebene liegt. — Setzen wir nun

$$X = l \cdot \cos\alpha, \quad Y = l \cdot \cos\beta, \quad Z = l \cdot \cos\gamma,$$

und lassen dann Z unendlich groß werden, so wird die Gl. (4) zu

$$h(y \cdot \cos\alpha - x \cdot \cos\beta) + (x^2 + y^2)\cos\gamma = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Folglich: **Der scheinbare Umriß einer Wendelfläche von einem unendlich fernen Punkte gesehen projiziert sich auf eine zur Schraubachse senkrechte Ebene in einen Kreis.** Die Gl. (5) stellt aber auch einen Zylinder dar, der die Achse der Fläche enthält, folglich können wir zufolge des früher (Nr. 305) Gesagten auch behaupten: **Der scheinbare Umriß einer Wendelfläche von einem unendlich fernen Punkte aus ist eine exzentrische Schraubenlinie.**

III. Die windschiefe (geschränkte) Schraubenfläche.

306. Die Definition der geraden Schraubenfläche läßt sich verallgemeinern. Denken wir uns nämlich wieder eine Schraubenlinie Σ mit der Achse a und lassen eine Gerade sich so bewegen, daß sie stets Σ und a, und zwar letztere unter einem gegebenen Winkel λ trifft, so entsteht die schiefe Schraubenfläche; sie heißt auch scharfgängige Schraube oder auch Schraube mit dreieckiger Öffnung. Sie kann natürlich auch durch die Schraubenbewegung einer Geraden erzeugt werden, die die Achse unter dem Winkel λ trifft. Ist g eine Erzeugende, sind A und C die Punkte in denen sie die a und Σ trifft, und fällen wir das Lot CB auf a, so ist in dem rechtwinkeligen Dreiecke ABC stets die Kathete BC gleich dem Radius r des Zylinders auf dem Σ liegt, der Winkel BAC gleich λ; also bleiben auch die andere Kathete $AB = k$ und die Hypotenuse $AC = l$ konstant. Also läßt sich die schiefe Schraubenfläche auch dadurch erzeugen, **daß eine Gerade sich so bewegt, daß zwei ihrer Punkte A und B mit dem festen Abstande $AB = l$ stets auf einer Schraubenlinie und deren Achse bleiben.** Nehmen wir das Koordinatensystem



wie üblich, so läßt sich eine Erzeugende, als Verbindungslinie der Punkte $(0, 0, h\varphi + k)$ und $(r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi, h\varphi)$ darstellen durch die Gleichungen

$$\frac{x}{r \cdot \cos\varphi} = \frac{y}{r \cdot \sin\varphi} = \frac{z - (h\varphi + k)}{-k}.$$

Eliminieren wir φ, so ergibt sich

$$\frac{k}{r}\sqrt{x^2 + y^2} + z - k - h \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und dies ist die Gleichung der Fläche (die natürlich für $k = 0$ in Gl. (2) übergeht). Setzen wir $z = 0$ und führen gleich Polarkoordinaten ein, so bekommen wir

$$\frac{k}{r}\varrho - k - h\omega = 0,$$

welche Gleichung (s. S. 84) eine Archimedische Spirale darstellt. Somit haben wir den Satz: **Jeder Normalschnitt einer schiefen Schraubfläche ist eine Archimedische Spirale.**[1])

Wir wollen ferner die Berührungskurve unserer Fläche mit dem umbeschriebenen Zylinder bestimmen, dessen Erzeugende mit den Koordinatachsen die Winkel α, β, γ bilden.[2]) Bezeichnen wir die linke Seite von (6) mit f, so wird jene Kurve dargestellt durch

$$f = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \cos\gamma = 0.$$

Setzen wir für f seinen Wert, so erhalten wir

$$\frac{k(x\cos\alpha + y\cos\beta)}{r\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{h(x\cos\beta - y\cos\alpha)}{x^2 + y^2} + \cos\gamma = 0. \quad . \quad . \quad (7)$$

Da diese z nicht mehr enthält, so ist sie die Gleichung der Projektion der Kurve auf die xy-Ebene. Um sie zu vereinfachen, setzen wir an Stelle der Koordinaten x, y die neuen ξ, η durch folgende Beziehungen definiert

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta = \xi \cdot \sin\gamma, \; x \cdot \cos\beta - y \cdot \cos\alpha = \eta \cdot \sin\gamma.$$

Dann wird

$$\frac{k \cdot \xi \sin\gamma}{r\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} - \frac{h \cdot \eta \sin\gamma}{\xi^2 + \eta^2} + \cos\gamma = 0,$$

oder wenn wir Polarkoordinaten einführen:

$$\varrho = \frac{h \cdot \operatorname{tg}\gamma \cdot \sin\omega}{1 + \frac{k}{r}\operatorname{tg}\gamma \cdot \cos\omega}.$$

Dies ist eine Kaprikornoide (vgl. S. 81), die als charakteristische Konstanten $A = h \cdot \operatorname{tg}\gamma$ und $R = \frac{hr}{k}$ hat. Der Fundamentalkreis der

---

1) Vgl. hierzu die allgemeine Bemerkung über die Varignonsche Transformation in Nr. 300.

2) Vgl. V. Poncelet, *Application d'analyse à la géométrie* (Paris, 1864) I. S. 447.

Kurve ist also unabhängig von der Richtung der Erzeugenden des Zylinders. Die Kurve hat einen reellen Doppelpunkt, wenn $A > R$ also wenn $\operatorname{tg}\gamma > \frac{r}{k}\cdot$ Nun ist aber $\frac{r}{k}$ gleich dem Tangens des konstanten Winkels λ, den die Erzeugenden der Schraubenfläche mit der Achse bilden; folglich hängt die Existenz des Doppelpunktes davon ab, ob $\gamma \gtrless \lambda$. Wenn $\lambda \overline{\gtrless} \gamma$, so hat die Kurve unendliche Zweige, anderenfalls ist sie geschlossen. (Diese Bemerkungen erleichtern die Konstruktion des Schattens, den die schiefe Schraubenfläche auf eine senkrechte Ebene wirft, unter der Voraussetzung, daß die Lichtstrahlen parallel auffallen.)

Nehmen wir im speziellen $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, so wird die Gl. (7)

$$\varrho = \frac{hr}{\varrho}\cdot\operatorname{ctg}\omega.$$

und stellt dann (S. 79) eine Kappa-Kurve dar; also können wir sagen: **Der zweite scheinbare Umriß der schiefen Schraubenfläche projiziert sich in eine Kappa-Kurve.**

Zur Übung. Man untersuche die Schattenkurve einer schiefen Schraubenfläche für den Fall, daß die Lichtquelle im Endlichen liegt.[1])

307. Stellen wir die Schraubenlinie Σ in Orthogonalprojektion nach der üblichen Weise dar, so ist auch die Darstellung der Fläche sehr bequem. Nehmen wir nämlich einen beliebigen Punkt $C \equiv (C', C'')$ von Σ und denjenigen Punkt $A \equiv (A', A'')$ auf a, dessen Kote um die Strecke k größer (oder kleiner) ist, als die von C, so ist AC eine Erzeugende g der Fläche. g' ist der Radius $A'C'$ des Kreises Σ'. Es ist also leicht, g'' zu konstruieren, wenn g' als eine durch a' gehende Gerade gegeben ist. Ebenso leicht ist es, wenn ein Punkt der Fläche im Grundriß als M' gegeben ist, das zugehörige M'' zu finden (s. Fig. 141). Die Tangentialebene in M an die Fläche enthält außer der Erzeugenden g auch noch die Tangente t an die durch M gehende Schraubenlinie der Fläche, ist also leicht zu konstruieren, wie es in der Figur geschehen ist, wo t', t'' die Projektion der Tangente, t_1, t_2 die Spurlinien der gesuchten Ebene bedeuten.

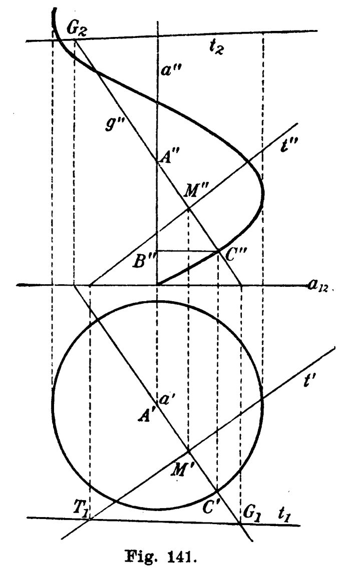


Fig. 141.

1) J. de la Gournerie, Journ. de l'Ec. polyt., XXXIV cah., 1851.

IV. Die allgemeinen Schraubenregelflächen.

308. Lassen wir in der Definition der schiefen Schraubenfläche die Bedingung fallen, daß die erzeugende Gerade die Achse a treffen soll, so erhalten wir eine allgemeine Schraubenregelfläche, die die beiden früher behandelten Flächen als Spezialfälle in sich schließt. Wenn

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}$$

die Gleichungen der Erzeugenden sind, und man schreibt diese als

$$x=a+t\cdot\cos\alpha,\quad y=b+t\cdot\cos\beta,\quad z=c+t\cdot\cos\gamma,$$

und zieht die Gl. (2) hinzu, so sieht man, daß die parametrische Darstellung der Fläche folgende Form annehmen kann

$$\left.\begin{aligned} x&=(a+t\cdot\cos\alpha)\cos u-(b+t\cdot\cos\beta)\sin u\\ y&=(a+t\cdot\cos\alpha)\sin u+(b+t\cdot\cos\beta)\cos u\\ z&=c+t\cdot\cos\gamma+hu\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(8)$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich, wenn wir die xy-Ebene parallel zur Anfangslage der Erzeugenden nehmen; letztere läßt sich dann durch

$$y=b,\quad z=x\cdot\operatorname{tg}\lambda+c$$

darstellen, und diese sind gleichbedeutend mit den folgenden:

$$x=t,\quad y=b,\quad z=t\cdot\operatorname{tg}\lambda+c.$$

An Stelle von (8) können wir dann setzen

$$x=t\cdot\cos u-b\cdot\sin u,\quad y=t\cdot\sin u+b\cdot\cos u,\quad z=t\cdot\operatorname{tg}\lambda+c+hu.\quad(8')$$

Nun liefern uns diese

$$t=\sqrt{x^2+y^2-b^2},\quad \frac{y}{x}=\frac{\operatorname{tg}u+\frac{b}{t}}{1-\frac{b}{t}\operatorname{tg}u}=\operatorname{tg}\left(u+\operatorname{arctg}\frac{b}{t}\right),$$

daher ist

$$u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{x^2+y^2-b^2}},$$

oder auch

$$u=\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\arcsin\frac{b}{\sqrt{x^2+y^2}}=\arcsin\frac{y\sqrt{x^2+y^2-b^2}-bx}{x^2+y^2}.$$

Setzen wir nun in dritte der Gl. (8′) für t und u diese Werte ein, so ergibt sich:

$$z=\sqrt{x^2+y^2-b^2}\cdot\operatorname{tg}\lambda+c+h\cdot\arcsin\frac{y\sqrt{x^2+y^2-b^2}-bx}{x^2+y^2}\quad(9)$$

als Gleichung der Fläche. — In dem Spezialfalle $\lambda=0$ sind alle Erzeugenden parallel zur xy-Ebene; alsdann wird Gl. (9)

$$z=c+h\arcsin\frac{y\sqrt{x^2+y^2-b^2}-bx}{x+y^2}\quad\ldots\quad(10)$$

und stellt dann die Fläche dar, die die französischen Geometer „surface d'intrados de l'escalier à noyau plein" nennen; alle ihre Erzeugenden sind parallel zu einer festen Ebene.

Wenn man zur graphischen Darstellung der allgemeinen Regelschraubenfläche Orthogonalprojektion nimmt, und als Grundebene eine zur Achse a senkrechte Ebene wählt, so werden die Erzeugenden im Grundriß zu Tangenten g' eines Kreises mit dem Zentrum a', der Radius ist gleich dem kürzesten Abstand r der Geraden von a. Dieser Kreis ist die Projektion der Kehl- oder Striktions-Schraubenlinie der Fläche und zugleich der erste scheinbare Umriß. Will man g'' erhalten, so betrachte man zwei beliebige Punkte P und Q von g, und zeichne die beiden Schraubenlinien, die von P und Q beschrieben werden auch im Aufriß; so findet man P'' und Q'', deren Verbindungslinie g'' ist.

Zur Übung. I. Nachzuweisen, daß der scheinbare Umriß einer allgemeinen Schraubenfläche, gesehen von einem beliebigen Punkte des Raumes aus, eine Kurve ist, die auf einer algebraischen Fläche liegt. — **II.** Den Fall, daß jener Punkt im Unendlichen liegt, zu untersuchen. — **III.** Diejenigen Schraubenlinien derselben Fläche aufzusuchen, die die parabolische Kurve der Fläche bilden.

§ 3. Einige darstellend geometrische Aufgaben über Schraubenflächen im allgemeinen.

309. Ist eine Schraubenfläche durch ihre Achse a, die Ganghöhe H und die Erzeugende Γ bestimmt, und man will sie in Orthogonalprojektion darstellen, so nimmt man zweckmäßig die Grundrißebene senkrecht, die Aufrißebene parallel zu a und zugleich parallel der yz-Ebene, so daß die y-Achse parallel zur Grundlinie wird. Sind dann die beiden Projektionen von Γ gegeben, so lassen sich verschiedene Aufgaben über diese Flächen leicht lösen, wie wir jetzt zeigen wollen.

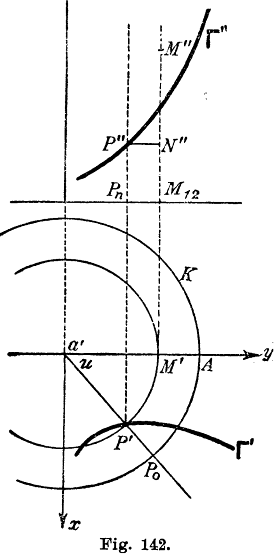


Fig. 142.

I. Den Hauptmeridian punktweise zu konstruieren. Diese Linie hat eine analytische Darstellung, die aus der Gl. (2) entsteht, wenn man in ihr $x=0$ setzt, oder $\xi(t)\cdot\cos u-\eta(t)\cdot\sin u=0$. Sie ist also:

$$\operatorname{tg} u=\frac{\xi(t)}{\eta(t)},\quad \text{oder}\quad u=\operatorname{arctg}\frac{\xi(t)}{\eta(t)}.$$

Hieraus folgt dann

$$z=\xi(t)+h\cdot\operatorname{arctg}\frac{\xi(t)}{\eta(t)}\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad (11)$$

Betrachten wir nun (s. Fig. 142) einen beliebigen Punkt $P\equiv(P', P'')$ von Γ und zeichnen den Kreis K mit dem Zentrum a' und den Ra-

dius h, der von der positiven Richtung der y-Achse in A geschnitten wird. Ist nun M' der Schnitt von $a'A$ mit dem Kreise um a' mit dem Radius $a'P$, so ist M' die erste Projektion eines Punktes des Hauptmeridians. Ist nun P_0 der Schnitt von $a'P'$ mit K, so ist offenbar $\sphericalangle P_0 a' A = \sphericalangle \operatorname{arc\,tg} \frac{\xi(t)}{\eta(t)}$, also $\operatorname{arc} P_0 A = h \cdot \operatorname{arctg} \frac{\xi(t)}{\eta(t)}$. Die Gl. (11) zeigt uns aber, daß die Ordinate von M gleich der von P ist, vermehrt um den (etwa nach S. 63 rektifizierten) Bogen $P_0 A$. Ziehen wir also $M'M_{12}$ und $P'P_{12}$ senkrecht zur Grundlinie und tragen auf ersterem $P_{12}P'' + \operatorname{arc} P_0 A = M_{12}M''$ ab, so erhalten wir den Aufriß des zu M' gehörenden Punktes M des Meridians; durch Variation von P erhalten wir alle anderen.

II. Gegeben der Grundriß P' eines Punktes P der Fläche, gesucht der Aufriß P''. Analytisch ist die Aufgabe identisch mit der: gegeben die Koordinaten x, y von P gesucht z. Demnach folgt aus Gl. (2)

$$x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad \frac{y}{x} = \frac{\xi \sin u + \eta \cdot \cos u}{\xi \cos u - \eta \cdot \sin u} = \frac{\operatorname{tg} u + \frac{\eta}{\xi}}{1 - \frac{\eta}{\xi} \operatorname{tg} u}.$$

Setzen wir nun

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \psi,$$

so haben wir

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg}(u + \varphi),$$

oder

$$\psi \equiv u + \varphi \pmod{2\pi}, \qquad \text{d. h.}$$

$$u = \psi - \varphi + 2k\pi \quad (\text{wo } k \text{ eine ganze Zahl}).$$

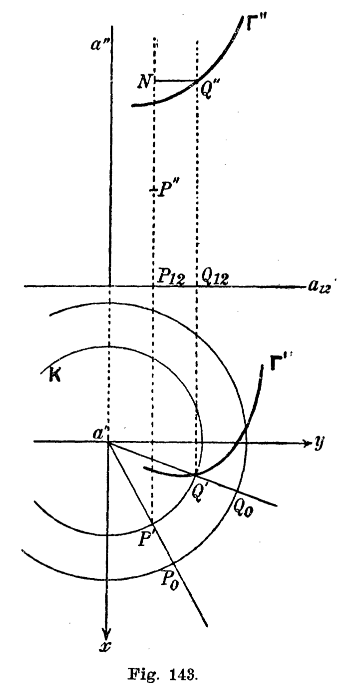


Fig. 143.

Der Punkt (ξ, η) ist daher einer der Schnitte Q' von Γ' mit dem Kreise K, dessen Zentrum a', dessen Radius $a'P'$ (s. Fig. 143), und es ist, wenn wir Bogen und Winkel einführen gezählt im positiven Sinne

$$\sphericalangle P'a'x = \psi, \quad \sphericalangle Q'a'x = \varphi,$$

also

$$\sphericalangle a'P'Q' = \varphi - \psi, \quad \text{und} \quad z = \zeta(t) - \operatorname{arc} P_0 Q_0,$$

wenn P_0 und Q_0 die Schnitte von $a'P'$ und $a'Q'$ mit dem Kreise um a' mit dem Radius h sind. Fällen wir nun auf die Grundlinie die Lote $P'P_{12}$ und $Q'Q_{12}$ und verlängern sie, so daß letzeres die Γ'' in Q'' trifft, so ist $Q_{12}Q'' = \zeta(t)$; machen wir $P_{12}N = Q_{12}Q''$ und verkürzen ersteres um $\operatorname{arc} P_0 Q_0$, so daß $P_{12}P'' = Q_{12}Q'' - \operatorname{arc} P_0 Q_0$, so ist P'' eine der gesuchten Projektionen. Unzählige andere liegen auf derselben Ordinate in Abständen von P'', die gleich einem Vielfachen

der Ganghöhe sind. Außerdem gibt es noch weitere Serien solcher Punkte, wenn Γ'' den Kreis K öfter schneidet.

III. Gegeben zwei Schraubenflächen mit gemeinsamer Achse und derselben Ganghöhe, gesucht die Schnittlinien. Diese sind offenbar Schraubenlinien mit derselben Achse und derselben Ganghöhe. Um sie zu finden, konstruiere man die Hauptmeridiane beider Flächen, und bestimme deren Schnittpunkte: durch jeden von diesen geht eine der gesuchten Linien.

IV. Die Schnittpunkte einer Schraubenfläche $\mathcal{S}$ mit einer Geraden g zu bestimmen. Man betrachte die Schraubenfläche die mit $\mathcal{S}$ die Achse und die Ganghöhe gemeinsam hat, aber als Erzeugende die Gerade g hat. Diese schneidet $\mathcal{S}$ in einer gewissen Zahl von Schraubenlinien, die nach III zu bestimmen sind, und jede von diesen trifft g in einer Anzahl von Punkten, welche die gesuchten sind. — In ähnlicher Weise lassen sich die Schnitte mit einer anderen Linie auffinden.

V. Die Schnittlinie einer Schraubenfläche mit einer Ebene τ zu konstruieren. Wir schneiden beide Flächen durch eine horizontale Ebene σ; wir erhalten so eine Kurve N und auf τ eine Gerade s. $\mathsf{N} \equiv \mathsf{N}'$ erhalten wir aus den Meridian Γ durch eine Varignonsche Transformation (S. 88); s' schneidet N′ in Punkten, die dem Grundriß der gesuchten Kurve angehören, während die zugehörigen Ordinaten s'' in Punkten des Aufrisses schneiden. Variieren wir s_2, so ändert sich N′ in der Lage, bleibt aber sich selber kongruent; zu jeder Lage erhält man neue Punkte der gesuchten Kurve. Natürlich vereinfacht sich die Aufgabe, wenn zur Bestimmung der Schraubenfläche der Normalschnitt N gegeben ist; in diesem Falle aber wird die Konstruktion einfacher, da N′ immer identisch mit der gegebenen N ist.

§ 4. Untersuchung einer besonderen Schraubenfläche, nämlich der von Saint Gilles.

310. Eine Schraubenfläche, die als Hauptmeridian einen Kreis hat, heißt Schraubenfläche von Saint Gilles[1]). Nehmen wir wieder die Achse der Fläche als z-Achse, so läßt sich der Hauptmeridian darstellen durch

$$(x-a)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

oder auch durch

$$x = a + r \cdot \cos t, \quad y = 0, \quad z = c + r \cdot \sin t.$$

Demnach hat die Fläche die Gleichung

$$\left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2 + \left(z - h \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - c\right)^2 - r^2 = 0, \quad . \quad (12)$$

1) So genannt, weil sie als Gewölbefläche zuerst in der Probstei von Saint Gilles (Stadt in der Nähe von Arles, Südfrankreich) angewendet worden ist.

und als parametrische Darstellung

$$x = (a + r \cdot \cos t) \cos u, \quad y = (a + r \cdot \cos t) \sin u, \quad z = c + r \sin t + hu. \quad (\mathbf{13})$$

Aus (12) schließt man, daß die Normalschnitte der Fläche sich in Kurven projizieren, die folgende Polargleichung haben

$$(\varrho - a)^2 + (h\omega - c)^2 - r^2 = 0.$$

Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche im Punkte (t, u) wird sein

$$\begin{vmatrix} x-(a+r\cos t)\cos u & y-(a+r\cos t)\sin u & z-(c+r\sin t+hu) \\ -\sin t\cdot\cos u & -\sin t\cdot\sin u & \cos t \\ -(a+r\cos t)\sin u & (a+r\cos t)\cos u & h \end{vmatrix} = 0. \quad (\mathbf{14})$$

Nennen wir den Winkel, den diese Ebene mit der xy-Ebene bildet, γ, so ist

$$\cos\gamma = \frac{(a + r\cos t)\sin t}{\sqrt{(a + r\cos t)^2 + h^2\sin^2 t}}.$$

Da dieser Ausdruck unabhängig von u ist, so ist γ konstant für alle Punkte der einen von den ∞^1 Schraubenlinien, die die Fläche enthält. Man kann also sagen: **Ist P ein Punkt der Saint Gillesschen Fläche und π die zugehörige Tangentialebene, so bleibt π stets Tangentialebene, wenn man sie zugleich mit P an der die Fläche erzeugenden Schraubung teilnehmen läßt.** Dieser Satz ist offenbar ein Spezialfall der in Nr. 301 gemachten allgemeinen Bemerkung; wir haben ihn nur als Kontrolle abgeleitet. Für einen Punkt des Hauptmeridians, für den $u = 0$, wird Gl. (14)

$$\begin{vmatrix} x-(a+r\cos t) & y & z-(c+r\sin t) \\ -\sin t & 0 & \cos t \\ 0 & (a+r\cos t) & h \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$[x - (a + r\cos t)]\cos t\cdot(a + r\cos t) - h\sin t\cdot y + [z - (c + r\sin t)] \cdot\sin t\cdot(a + r\cos t) = 0.$$

Die entsprechende Normale hat also die folgenden Gleichungen:

$$\frac{x-(a+r\cos t)}{(a+r\cos t)\cos t} = \frac{y}{-h\sin t} = \frac{z-(c+r\sin t)}{(a+r\cos t)\sin t};$$

nun werden diese befriedigt, wenn man setzt

$$x = a, \quad y = \frac{rh\cdot\sin t}{a + r\cdot\cos t}, \quad z = c;$$

daher treffen alle Normalen der Fläche in den Punkten jenes Meridians die Geraden $x = a$, $z = c$, und diese ist die im Mittelpunkte des Kreises auf seiner Ebene errichtete Senkrechte. Was nun für den Hauptmeridian gilt, gilt auch für alle anderen, und daher haben wir den Satz:

Die Normalen in den Punkten eines Meridiankreises der Saint Gillesschen Fläche treffen alle die im Mittelpunkte des Kreises errichtete Senkrechte. Die in analogen Punkten der ∞^1 Meridiankreise errichteten Normalen bilden offenbar eine spezielle Schraubenregelfläche von der in Nr. 309 beschriebenen Art.

311. Um die beschriebene Fläche graphisch darzustellen, nehmen wir die Aufrißebene parallel zur Ebene des erzeugenden Kreises Γ in seiner Anfangslage. Um eine bestimmte Vorstellung zu erhalten, wollen wir in unserer Fig. 144 annehmen, daß Γ die Achse a nicht schneide, und daß $MN \equiv (M'N', M''N'')$ der horizontale Durchmesser des Kreises Γ mit dem Mittelpunkte O sei. Dann beschreibt M die Kehllinie M, N die Äquatorlinie N, und O eine Schraubenlinie Ω, die wir Zentrallinie nennen wollen. Diese drei Linien bilden sich im Grundriß als drei Kreise mit dem Zentrum a' und den Radien $a'M'$, $a'N'$, $a'O'$ ab. M′ und N′ bilden den ersten scheinbaren Umriß der Fläche. M″, N″, Ω″ dagegen sind Sinuslinien von gleicher Wellenlänge aber verschiedener Amplitude. Jeder Punkt P von Γ erzeugt eine Schraubenlinie, die im Aufriß sich als eine ebensolche Sinuslinie projiziert, und die Enveloppe aller dieser Sinuslinien liefert den zweiten scheinbaren Umriß der Fläche; im Grundriß geht jene Schraubenlinie in einen Kreis mit dem Zentrum a' über. Umgekehrt

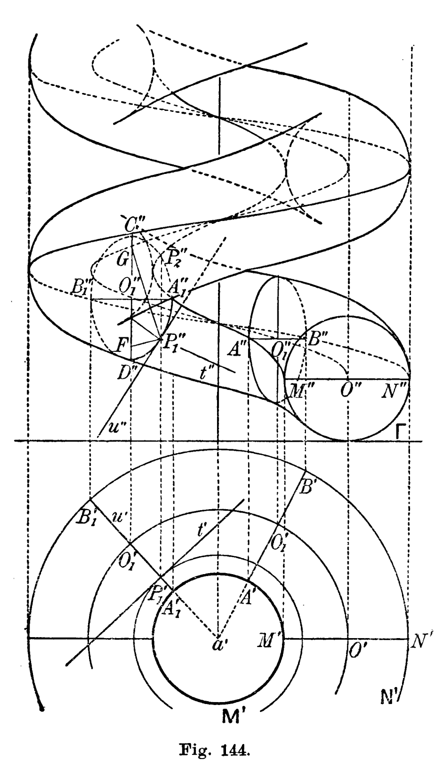


Fig. 144.

ist jeder innerhalb von M′ und N′ gezeichneter konzentrischer Kreis die Projektion zweier auf der Fläche gelegener Schraubenlinien von derselben Steighöhe wie Ω. Jede radial verlaufende Strecke $A'B'$ zwischen denselben Kreisen ist dagegen die Projektion eines Meridians Γ, der sich im Aufriß als Ellipse Γ'' abbildet, deren vertikale (große) Achse gleich dem Durchmesser von Γ ist, dessen kleine Achse $A''B''$ gleich der Projektion von $A'B'$ auf die Grundlinie ist und stets mit ihren Endpunkten auf M″ und N″ liegt, während ihr Mittelpunkt O_1'' auf Ω″ liegt. Die Enveloppe aller dieser Ellipsen liefert ebenfalls den zweiten scheinbaren Umriß.

Nach diesen Überlegungen ist es leicht, **die Punkte der Fläche zu finden, deren Grundriß ein gegebener Punkt P_1' ist.** Wir betrachten nämlich die Schraubenlinien Φ und $\overline{\Phi}$ der Fläche, deren Projektion Φ' der Kreis mit dem Radius $a'P_1'$ ist. Er schneide $M'N'$ in P' und die Ordinate von P' schneide Γ in P'' und $\overline{P}''$[1]). Die durch diese Punkte gehenden Sinuslinien Φ'' und $\overline{\Phi}''$ schneiden nun die Ordinate von P_1' in zwei Reihen von Punkten P_1'', P_2'', deren jeder als Bild des gesuchten Punktes angesehen werden kann; die Strecken $P_1''P_2''$ sind natürlich alle äquipollent mit $P''\overline{P}''$.

Wir können gleichfalls eine **Konstruktion der Tangentialebene in einem beliebigen Punkte** $P_1 \equiv (P_1', P_1'')$ angeben. Diese muß sowohl die Tangente t an die durch P_1 gehende Schraubenlinie als auch die Tangente u an den durchgehenden Meridian Γ_1 enthalten. Die Projektionen t', t'', die Tangenten an den Kreis und die betreffende Sinuslinie sind, können wir konstruieren. u' fällt mit $A_1'B_1'$ zusammen; u'' ist Tangente an die vorhin beschriebene Ellipse Γ_1'', deren Mittelpunkt O_1'' war. Konstruieren wir in bekannter Weise deren Brennpunkte F und G (s. Fig. 144), halbieren den Winkel $FP_1''G$ und errichten auf der Halbierungslinie in P_1'' die Senkrechte, so haben wir u''. Die Spurlinien der gesuchten Ebene werden dann in bekannter Weise konstruiert.

Schließlich wollen wir noch die Gleichung des zweiten scheinbaren Umrisses entwickeln. Wir nehmen die Gl. (14), setzen darin $x = l\cos\alpha$, $y = l\cdot\cos\beta$, $z = l\cdot\cos\gamma$ und lassen dann l nach ∞ hin wachsen; wir erhalten dann die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ -(a + r\cos t)\sin u & (a + r\cos t)\cos u & h \\ -\sin t\cdot\cos u & -\sin t\cdot\sin u & \cos t \end{vmatrix} = 0,$$

die die Berührungslinie der Tangentialebenen an die Fläche darstellt, die parallel zu der Geraden sind, die mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet. Für den Spezialfall $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$ erhalten wir

$$-(a + r\cos t)\sin u\cdot\cos t + h\sin t\cdot\cos u = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} u = \frac{h\cdot\operatorname{tg} t}{a + r\cdot\cos t} \qquad (15)$$

Die Fig. 144 zeigt die merkwürdige Gestalt dieser Kurve.

Diese Gleichung kann nun benutzt werden, um den scheinbaren zweiten Umriß der Fläche zu konstruieren, indem man auf derjenigen Schraubenlinie, die dem Parameter t entspricht, den zugehörigen Punkt (u) bestimmt der dem Umriß angehört (s. Fig. 145). Ist näm-

1) Die drei letzten Punkte sind in der Figur nicht gezeichnet.

lich $P \equiv (P', P'')$ der Punkt des Hauptmeridians von dem jene Schraubenlinie ausgeht, so ist zunächst $\sphericalangle P''O''N'' = t$. Es sei nun E der Schnitt von $M''N''$ mit a'', und $O''F$ gleich der reduzierten Ganghöhe h, K der Schnitt der Ordinate $P'P''$ mit $M''N''$, und G der Punkt, in welchem $O''P''$ von der in F zu $M''N''$ errichteten Senkrechten getroffen wird. Dann ist $FG = h \cdot \operatorname{tg} t$, und

$$EK = a + r \cdot \cos t.$$

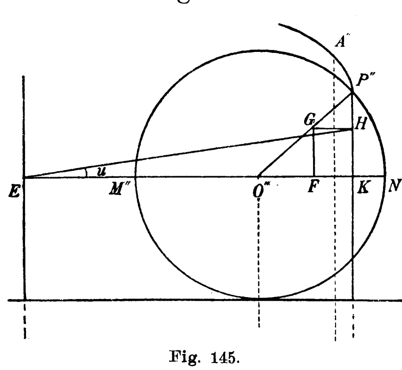


Fig. 145.

Die Parallele durch G zu $M''N''$ treffe nun die Ordinate $P'P''$ noch in H. Verbindet man dann H mit E, so ist

$$HK = FG = h \cdot \operatorname{tg} t$$

und

$$\operatorname{tg} HEK = \frac{HK}{EK} = \frac{h \cdot \operatorname{tg} t}{a + r \cdot \cos t}.$$

Diese Beziehung mit Gl. (15) verglichen beweist, daß

$$\sphericalangle HEK = u.$$

Zieht man nun im Grundriß die Parallele zu EH, so schneidet sie den Kreis um a' mit $a'P'$ beschrieben in A' und $\overline{A}'$; jeder dieser Punkte ist erste Projektion einer Reihe von Punkten des zweiten scheinbaren Umrisses der Fläche, und diese sind die Schnitte der Ordinaten mit der zu P'' gehörenden Schraubenlinie. Der Ort der Punkte A', $\overline{A}'$ (d. h. die Horizontalprojektion des zweiten scheinbaren Umrisses) ist eine algebraische Kurve 8ter Ordnung, deren Gleichung das Resultat der Elimination von z aus der Gl. (12) und ihren Abgeleiteten in bezug auf y ist.

§ 5. Einiges über andere Schraubenflächen.

312. I. Mit dem Namen colonne torse (gewundene Säule) bezeichnen die französischen Geometer eine Fläche, die erzeugt wird von einem Kreise, dessen Ebene stets horizontal bleibt, und dessen Mittelpunkt sich auf einer Schraubenlinie mit vertikaler Achse bewegt, bei der der Zylinder, auf dem die Schraubenlinie liegt, denselben Radius r wie jener Kreis hat. Ist wieder h die Steigung der Schraubenlinie, so hat sie die Gleichungen:

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi, \quad z = h\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die Gleichung der Fläche ist nun das Resultat der Elimination von φ aus den Gleichungen

$$(x - r\cos\varphi)^2 + (y - r\sin\varphi)^2 = r^2, \qquad z = h\varphi;$$

sie ist daher

$$x^2 + y^2 - 2R\left(x\cos\frac{z}{h} + y\sin\frac{z}{h}\right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Fläche kann auch dargestellt werden durch die drei Gleichungen

$$x = r(\cos\varphi + \cos\psi), \quad y = r(\sin\varphi + \sin\psi), \quad z = h\varphi, \quad . \quad (3)$$

oder durch

$$x = 2r \cdot \cos\frac{\varphi+\psi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi-\psi}{2}, \quad y = 2r\sin\frac{\varphi-\psi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi+\psi}{2}, \quad z = h\varphi. \quad (3')$$

Die Koordinatenlinien auf der Fläche sind dann die Kreise $\varphi = \text{const.}$ und die Schraubenlinien $\psi = \text{const.}$ Betrachten wir eine beliebige dieser Schraubenlinien, so hat die Tangente in einem ihrer Punkte die Gleichung

$$\frac{x - r(\cos\varphi + \cos\psi)}{-r\sin\varphi} = \frac{y - r(\sin\varphi + \sin\psi)}{r \cdot \cos\varphi} = \frac{z - h\varphi}{h} \cdot \quad . \quad . \quad (4)$$

Wenn wir in dieser Gleichung $\varphi = \text{const.}$ nehmen und ψ variieren lassen, so erhalten wir die ∞^1 Tangenten an die Schraubenlinien der Fläche in den Punkten eines und desselben Kreises; durch Elimination von ψ erhalten wir also die Gleichung des Ortes aller dieser Tangenten. Nun kann man (4) auch schreiben als

$$(x - r\cos\varphi) + \frac{r}{h}(z - h\varphi)\sin\varphi = r\cos\psi,$$

$$(y - r\sin\varphi) - \frac{r}{h}(z - h\varphi)\cos\varphi = r\sin\psi.$$

Quadrieren und addieren wir, so wird

$$(x - r\cos\varphi)^2 + (y - r\sin\varphi)^2 + \frac{r^2}{h^2}(z - h\varphi)^2 + \frac{2r}{h}(z - h\varphi)(x\sin\varphi - - y\cos\varphi) = r^2,$$

oder auch

$$x^2 + y^2 - 2r(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + \frac{r^2}{h^2}(z - h\varphi)^2 + \frac{2r}{h}(z - h\varphi)(x\sin\varphi - - y\cos\varphi) = 0.$$

Der geometrische Ort der Tangenten an die Schraubenlinien der Fläche in den Punkten eines erzeugenden Kreises der gewundenen Säule ist also ein einschaliges Rotationshyperboloid[1]).

Aus der Gl. (2) folgt

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\left(y - r\sin\frac{z}{h}\right);$$

nun erhält man den scheinbaren Umriß der Fläche projiziert auf die xz-Ebene durch Elimination von y aus der Gleichung der Fläche

$$\left(x - r\cos\frac{z}{h}\right)^2 + \left(y - r\sin\frac{z}{h}\right)^2 = r^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

er ist also

$$x = \pm r + r\cos\frac{z}{h}.$$

1) Th. Olivier, *Mémoires de géometrie descriptive* (Paris, 1851), S. 85.

Diese Projektion besteht also aus zwei kongruenten Sinuslinien mit der Amplitude r.[1])

Um die Gleichung des Schnittes einer durch die Achse gehenden Ebene mit der Fläche zu bekommen, können wir setzen

$$x = u\cos\mu, \quad y = u\cdot\sin\mu, \quad z = v.$$

Dann wird Gl. (2) zu

$$u^2 - 2ur\left(\cos\frac{v}{h}\cos\mu + \sin\frac{v}{h}\sin\mu\right) = 0,$$

oder auch

$$u = 2r\cos\left(\frac{v}{h} - \mu\right),$$

also:

Die Achsenschnitte unserer Fläche bestehen aus einem Paar kongruenter Sinuslinien[2]).

Um die Schattengrenze der von parallelen Strahlen der Richtung d beleuchteten gewundenen Säule zu finden, beachte man, daß (wie oben gezeigt wurde) die Tangenten an die ∞^1 Schraubenlinien der Fläche in den Punkten eines Erzeugerkreises Γ ein einschaliges Hyperboloid bilden; daraus folgt, daß die zur Richtung d konjugierte Durchmesserebene jener Fläche den Kreis Γ in einem Punktepaar schneidet, das der gesuchten Linie angehört[3]). **Ihre Projektion auf die xy-Ebene ist eine algebraische Kurve.** Um das zu beweisen und ihre Gleichung zu ermitteln, wollen wir mit $\cos\lambda\sin\gamma$, $\sin\lambda\sin\gamma$, $\cos\gamma$ die Richtungskosinus der Geraden d bezeichnen[4]) und beachten, daß aus Gl. (2) folgt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2\left(x - r\cos\frac{z}{h}\right),\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2\left(y - r\sin\frac{z}{h}\right),\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{2r}{h}\left(x\sin\frac{z}{h} - y\cos\frac{z}{h}\right)\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (5)$$

Wenn wir nun statt der kartesischen Koordinaten x, y Polarkoordinaten ϱ, ω einführen, so werden die Gl. (2) und (5) zu

$$\varrho = 2r\cos\left(\frac{z}{h} - \omega\right) \quad \cdots\cdots \quad (6)$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2\left(\varrho\cos\omega - r\cos\frac{z}{h}\right),\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2\left(\varrho\sin\omega - r\sin\frac{z}{h}\right),\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{2r\varrho}{h}\sin\left(\frac{z}{h} - \omega\right)\cdot\end{aligned}$$

1) Olivier, a. O. S. 101. 2) Das. S. 265. 3) Das. S. 262—63.

2) Was ja erlaubt ist, da die Summe der Quadrate dieser Größen gleich 1 ist.

Demnach wird die Gleichung des umbeschriebenen Zylinders sein

$$\varrho \cos(\omega - \lambda) - r \cdot \cos\left(\frac{z}{h} - \lambda\right) + \frac{r\varrho}{h} \sin\left(\frac{z}{h} - \omega\right) \operatorname{ctg}\gamma = 0, \quad . \quad (7)$$

oder wegen der Gl. (6)

$$\varrho \cdot \cos(\omega - \lambda) - \frac{\varrho}{z} + \frac{r\varrho}{h} \sin\left(\frac{z}{h} - \omega\right) \cdot \operatorname{ctg}\gamma = 0.$$

Weil nun

$$r \cdot \cos\left(\frac{z}{h} - \omega\right) = \frac{\varrho}{z}, \quad r \cdot \sin\left(\frac{z}{h} - \omega\right) = h\left[\frac{1}{2} - \cos(\omega - \lambda)\right] \operatorname{ctg}\gamma,$$

so ergibt sich schließlich

$$r^2 = \frac{\varrho^2}{4} + h^2\left[\frac{1}{2} - \cos(\omega - \lambda)\right]^2 \operatorname{ctg}^2\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

als Polargleichung der Horizontalprojektion der Schattengrenze, und es ist leicht einzusehen, daß diese Kurve algebraisch ist.

313. Stellen wir die Fläche in Orthogonalprojektion dar, so bilden sich die erzeugenden Kreise im Grundriß in wahrer Größe als Kreise mit dem Radius r, alle durch a' gehend ab; sie umhüllen einen Kreis mit dem Radius $2r$ um a', der den ersten scheinbaren Umriß der Fläche darstellt. Im Aufriß gehen alle Kreise in Strecken von der Länge $2r$ über parallel zur Grundlinie und mit dem Mittelpunkte auf der (die Leitschraubenlinie Σ darstellenden) Sinuslinie Σ'' gelegen. Die Endpunkte, die den zweiten scheinbaren Umriß der Fläche liefern, liegen also auf zwei mit Σ'' kongruenten Sinuslinien (s. Fig. 146).

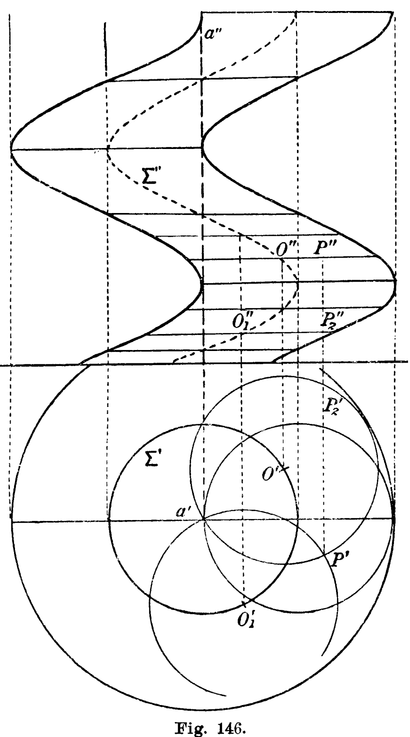


Fig. 146.

Aufgabe. Gegeben die erste Projektion P' eines Punktes, gesucht die zweite P''. Eine reelle Lösung erhalten wir nur, wenn P' innerhalb des Kreises mit dem Radius $2r$ liegt. Der Punkt P gehört irgend einem Kreise der Fläche an, dessen Zentrum O auf Σ liegt. O' liegt also auf dem Kreise Σ' und wird gefunden als einer der Schnitte des mit r um P' beschriebenen Kreises. Die Ordinate von O' schneidet Σ'' in O''; durch O'' ziehen wir die Parallele zur Grundlinie; diese wird von der Ordinate von P'' in P' getroffen. Auf jeder Windung liegen zwei

Punkte die P' zugehören. — In umgekehrter Weise kann man verfahren, um von P'' nach P' zu gelangen; auch hier erhält man zwei Lösungen, der eine Punkt (P_1') liegt auf der Vorderseite, der andere hinten (P_2').

Nach Th. Olivier **bilden die Tangentialebenen der Fläche in den Punkten eines Erzeugerkreises einen Zylinder**[1]. Ermitteln wir nun diejenigen dieser Ebenen, die einer gegebenen Richtung d parallel sind, so schneiden die zugehörigen (berührenden) Erzeugenden des Zylinders den entsprechenden Kreis, in Punkten der Linie der Schattengrenze, wenn die Fläche in der Richtung d beleuchtet wird; somit kann jene Linie graphisch gefunden werden[2].

314. II. Bewegt sich ein Kreis mit festem Radius r so, daß sein Mittelpunkt eine Schraubenlinie Σ durchläuft, während seine Ebene stets senkrecht zu Σ verbleibt, so entsteht eine Schraubenröhrenfläche (Serpentine, auch Schlangenrohr genannt). Diese Fläche kann auch erzeugt werden als Enveloppe aller Kugeln von festem Radius, deren Mittelpunkte auf Σ liegen. Da sich nun, bei Anwendung der Mongeschen Methode, diese Kugeln stets als Kreise projizieren, so ist der zweite scheinbare Umriß der Fläche die Enveloppe aller Kreise, deren Mittelpunkte auf der Sinuslinie Σ'' liegen, d. i. die Parallelkurve der Sinuslinie, und somit leicht zu zeichnen. Der erste scheinbare Umriß besteht offenbar aus zwei konzentrischen Kreisen, wie bei der Saint Gillesschen Fläche. Die Schraubenröhrenfläche ist nicht nur in mathematischer Beziehung interessant, sondern auch technisch von Wichtigkeit.

315. III. Unter den Schraubenflächen ist von theoretischem Standpunkte noch bemerkenswert die logarithmische Schraubenfläche:

1) Beweis. Aus Gl. (9) auf S. 144 folgt, daß die Gleichung der Tangentialebenen an die besprochene Fläche lautet:

$$\begin{vmatrix} x - R\cos\varphi - R\cos\psi & y - R\sin\varphi - R\sin\psi & z - h\psi \\ -R\sin\varphi & R\cos\varphi & h \\ -R\sin\psi & R\cos\psi & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Daher wird die allgemeine Gleichung der Ebenen, die die Fläche längs des Kreises $\varphi = \varphi_0$ berühren, sein

$$x\cos\psi - y\sin\psi + \frac{2}{h}\sin(\varphi_0 - \psi) + k = 0,$$

wo k eine Konstante von bekannter Bedeutung ist; nun ist aber diese Ebene, welchen Wert ψ auch haben möge, stets parallel zu der Geraden

$$\frac{x}{\sin\varphi_0} = \frac{y}{\cos\varphi_0} = \frac{z}{-\frac{1}{h}},$$

demnach umhüllen jene ∞^1 Ebenen tatsächlich einen Zylinder.

2) Olivier, a. O. S. 261.

sie entsteht durch Bewegung der logarithmischen Kurve (S. 83), wenn ihre Asymptote zugleich die Schraubenachse ist. Wir wollen hier nur diejenigen Eigenschaften angeben, die für die Darstellung der Fläche von Nutzen sind, indem wir es dem Leser überlassen, die entsprechenden Konstruktionen auszuführen. Es sei

$$x = a e^{\frac{z}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

die Gleichung der Kurve; dann ist k der bekanntlich konstante Wert der Subtangente. Die Gleichung der erzeugten Fläche wird dann sein

$$\sqrt{x^2 + y^2} - a e^{\frac{z - h \operatorname{arc} \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{x}}{k}} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Der Schnitt der Fläche mit der Ebene $z = c$ projiziert sich auf die xy-Ebene als die logarithmische Spirale

$$\varrho = a e^{\frac{c - h\omega}{k}} \quad (3)$$

Variieren wir c, so rotiert diese Kurve um den Pol, dabei sich stets kongruent bleibend. Eliminieren wir z aus Gl. (2) vermittels einer Differentiation, so bekommen wir die Gleichung

$$k\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) + h\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

aus der folgt, daß die Linien größter Neigung sich auf die xy-Ebene projizieren als die ∞^1 Integralkurven folgender Differentialgleichung:

$$k\left(x - y\frac{dx}{dy}\right) + h\left(-x\frac{dx}{dy} - y\right) = 0$$

oder

$$h\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) - k\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Nun entsteht die Differentialgleichung (5) aus (4) durch Verwandlung von h und k in $-k$ und h, also sind die Integralkurven von (5) von derselben Art, wie die von (4). Also: **Die Projektionen der Linien gleicher Neigung einer logarithmischen Schraubenfläche auf eine zur Achse senkrechte Ebene sind logarithmische Spiralen.**

Die allgemeine Gleichung der Tangentialebene an die Fläche (2) ist

$$k[(X - x)x + (Y - y)y] + h(xY - yX) - (Z - z)(x^2 + y^2) = 0, \quad (6)$$

wenn x, y, z die Koordinaten des Berührungspunktes sind, X, Y, Z die laufenden. Machen wir hierin $X = Y = 0$, so bekommen wir

$$Z = z - k,$$

woraus wir schließen: **Die Tangentialebene der logarithmischen Schraubenfläche im Punkte P schneidet die Flächenachse in einem Punkte Q, dessen Ordinate gleich der um die Konstante k verminderten**